No. 2 · 6 de abril de 2018

ABACUS

ISSN: 2590-7921

ENCUENTRO MATEMÁTICAS
preescolar y primaria

¡Un aprendizaje significativo!

MARYMOUNT

70 YEARS
1948 - 2018

MEMORIAS

MARYMOUNT

3 Encuentro Matemáticas

PREESCOLAR - PRIMARIA

Participantes

Gimnasio de Los Cerros

Colegio Los Nogales

Gimnasio Los Portales

Invita

MARYMOUNT

70 YEARS 1948 - 2018

AACBI Asociación Andina de Colegios del BI

CHARACTER COUNTS! COLOMBIA

GLOBAL NETWORK OF RSHM SCHOOLS

WORLD SCHOOL ib

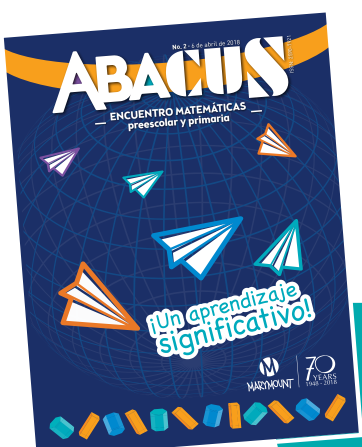
Red Papaz RED DE PADRES Y MADRES

uncoli UNION DE COLEGIOS INTERNACIONALES

ISO 9001 icontec CO-SC 5075-1

IQNet CERTIFIED MANAGEMENT SYSTEM

Contenido



ABACUS
Encuentro de matemáticas de preescolar y primaria
Número: 02
Fecha: 6 de abril de 2018
Periodicidad: anual
ISSN: 2590-7921

Rectora:
María Ángela Torres S.

Comité editorial:
Ana María Prada, Jefe depto. Matemáticas
Sofía Peña, Jefe Curricular Centro de Conocimiento
Carolina Vargas, Coordinadora Comunicaciones

Edición y publicación:
Departamento de Comunicaciones

Portada:
Diseño: Mariana Torres Aristizábal, exalumna
Técnica: digital usando plantillas y formatos de la aplicación Canva.

Diseño, preprensa e impresión:
Guías de Impresión Ltda.
www.guiasdeimpresion.com

Impreso en Bogotá D.C., Colombia
Octubre de 2018

Colegio Marymount
Calle 169 B No. 74A – 02
(+57 1) 66 99 077
www.marymountbogota.edu.co

Editorial

Ana María **Prada**

Jefe Departamento de Matemáticas
Colegio Marymount

El III Encuentro de Experiencias Significativas para la enseñanza de Matemáticas en Preescolar y Primaria, desarrollado el 6 de abril de 2018 en las instalaciones del Colegio Marymount, permitió generar un espacio de reflexión a partir de las experiencias de aula diseñadas por profesores de diversas instituciones de Bogotá.

Esta publicación es producto del trabajo dedicado e ingenioso de profesores de matemáticas que se atrevieron a compartir una experiencia pedagógica, esperando que sean tomados como fuente de inspiración por otros profesores preocupados por el desarrollo de competencias en este campo.

En esta oportunidad se contó con la participación de dos ponentes principales, Carlos Zuluaga y Henry Alejandro Ángulo, sumado a 13 profesores de 5 instituciones educativas. Los primeros promovieron reflexiones alrededor de los siguientes tópicos: el papel de la visualización en el desarrollo del pensamiento matemático a través de la lúdica y algunas estrategias implementadas para favorecer la comprensión del valor posicional.

Este Encuentro es una estrategia de formación situada para profesores de preescolar y primaria, busca un acercamiento real que permite a los profesores aprender de los expertos a través de la práctica y la reflexión. Es un espacio de profesores para profesores, partiendo de una creencia básica: las personas más idóneas para ayudar a otras a ejercer un oficio son aquellas que lo han vivido y han reflexionado sobre su experiencia.

El propósito de esta publicación es dar a conocer a la comunidad de profesores de matemáticas de preescolar y primaria las experiencias que se comunicaron en el evento. Invitamos a los lectores a reflexionar a partir de estas experiencias con el ánimo de diseñar ambientes de aprendizaje que redunden en experiencias significativas en la enseñanza de las matemáticas, pero sobretodo que aporten a la construcción de pensamiento en los estudiantes.

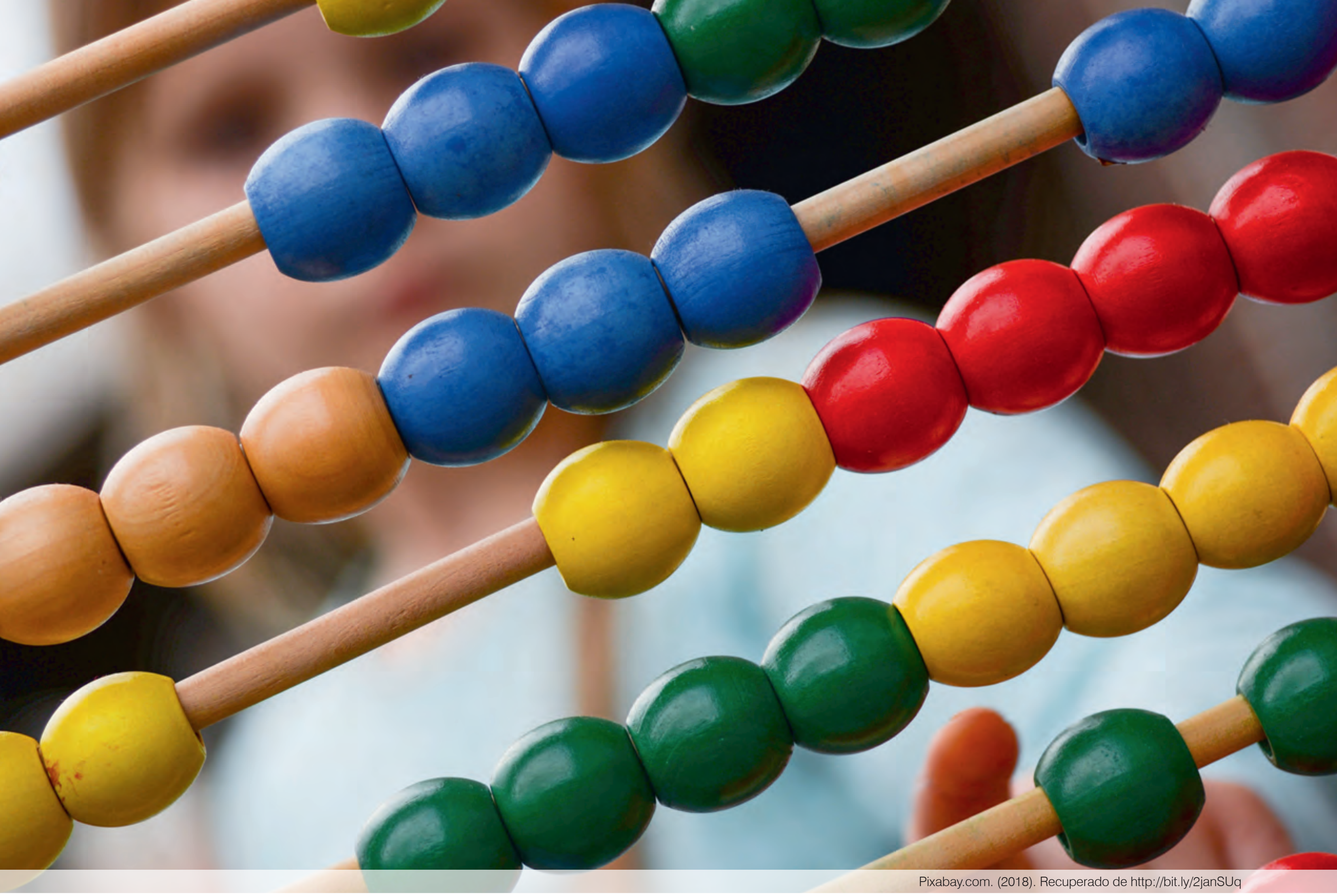
Estrategias de enseñanza para la comprensión de las matemáticas en educación infantil. Ejemplos sobre el concepto de valor posicional

Se presentan algunas estrategias de enseñanza diseñadas e implementadas en el marco de un estudio que tuvo como propósito favorecer la comprensión del valor posicional. Se adopta un enfoque conceptual de la comprensión en términos del desarrollo gradual de habilidades, y de la construcción progresiva de unidades (simples o compuestas) para incrementar la flexibilidad en el *conteo*, en la *realización de particiones*, en la *agrupación* y en la *comparación* de cantidades. Los hallazgos evidencian que las estrategias diseñadas permitieron hacer frente a las dificultades que presentaban los estudiantes, quienes avanzaron en su comprensión.

Palabras clave
Educación matemática infantil, valor posicional, estrategia de enseñanza, Comprensión.

Alejandro **Angulo Escamilla**

- Profesor de la Facultad de Educación, Maestría en Pedagogía (Énfasis en docencia para el desarrollo del Pensamiento Matemático) Universidad de la Sabana (Colombia).
- Profesor de Bachillerato Internacional en el Gimnasio Vermont (Bogotá).
- Licenciado en Matemáticas. Mágister en Docencia de las Matemáticas.
- Líneas de Investigación: Docencia para el Desarrollo del Pensamiento Matemático, Pensamiento aleatorio y cultura estadística, Enseñanza y aprendizaje de la demostración en geometría.
- Email: henry.angulo@unisabana.edu.co



Pixabay.com. (2018). Recuperado de http://bit.ly/2janSUq

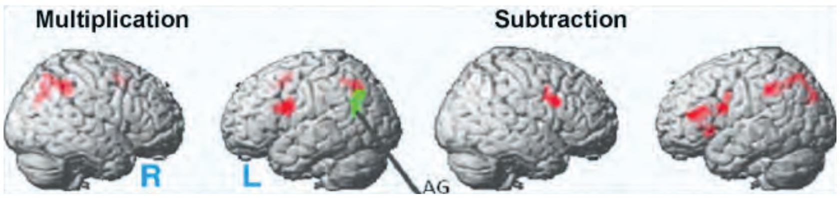
El ser humano selecciona, ordena e interpreta información en el cerebro para dar solución a un problema o razonar sobre una situación, utilizando mecanismos como la memoria, la atención, los procesos de comprensión, el aprendizaje, entre otros; así, las personas son capaces de *pensar,* pero sus maneras de hacerlo son tan diversas como los tipos de situaciones a las que se enfrentan día a día. Este artículo se ocupa, parcialmente, de la complejidad implicada en el pensamiento matemático asociado a la comprensión del concepto de valor posicional.

El término *pensamiento matemático* tiene diversas acepciones, se refiere a las formas en que piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas; al desarrollo de la dimensión lógico – matemática, entendida como la capacidad de establecer relaciones y operar con estas; o a las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana y confrontar esas ideas con la realidad, mediante la ejecución de las diversas tareas que se realizan diariamente.

El desarrollo del pensamiento matemático implica la construcción de nuevos sentidos e ideas matemáticas por parte de las personas, ideas que son correspondientes con los objetos matemáticos con los cuales tengan contacto en sus experiencias o prácticas. Así, el pensamiento matemático va más allá del aprendizaje memorístico de contenidos en el aula: se desarrolla cuando, en las experiencias de las personas, convergen diferentes *procesos* y diversos *dominios de conocimiento* (tipos de pensamientos y sistemas conceptuales, véase por ejemplo la propuesta del MEN (2006)), que son propios de la actividad matemática, que la integran y que, en el marco de situaciones contextualizadas, dan significado a los objetos matemáticos.

En acuerdo con Schoenfeld (2016), la complejidad implicada en el desarrollo de estos dominios conlleva el reconocimiento de que la matemática es la "ciencia de los patrones": como una inherente actividad social, las matemáticas consisten en intentos sistemáticos de una comunidad -basados en la observación, análisis y experimentación- para determinar la naturaleza o principios

Figura 1. Activación de redes neuronales en tareas de cálculo



de regularidades, ya sea en sistemas teóricos definidos axiomáticamente, o en modelos de sistemas abstraídos de objetos o situaciones del mundo real. Las herramientas de las matemáticas son la abstracción, la representación simbólica y la manipulación simbólica; sin embargo, un entrenamiento en las mismas no es suficiente para el desarrollo del pensamiento matemático; dado que pensar matemáticamente significa desarrollar un punto de vista matemático, es decir, valorar los procesos de matematización y abstracción, y tener la predilección o disposición de aplicarlos, así como desarrollar competencia en el uso de las herramientas propias de las matemáticas, al servicio de la meta de comprender las estructuras y construir sentido matemático.

Consistentemente, se entiende el pensamiento (matemático) como un entramado de disposiciones o tendencias hacia patrones particulares de comportamiento intelectual. Tal comportamiento disposicional requiere el desarrollo de: *habilidad, inclinación y sensibilidad*. Esta idea concuerda con aquellas derivadas de los estudios neurológicos, ya que a pesar de que los resultados y las interpretaciones son a veces heterogéneas, "todos están de acuerdo en que el tratamiento de los números y los cálculos es apoyado por una red distribuida donde las regiones parietales desempeñan un papel crucial" (Delazer, Domahs, Bartha, Brenneis, Lochy, Trieb y Benke, 2003, p. 77) (ver Figura 1).

Consecuentemente, los estímulos educacionales generados por las actividades matemáticas escolares (o no), se van abriendo camino en las neuronas configurando redes especializadas en la comprensión de los conceptos del cálculo y la cantidad (Bravo, 2010). Las acciones didácticas se traducirían en términos de actividades escolares que soliciten modalidades sensoriales variadas y permitan, a su vez, integrar estas actividades en otras de carácter más y más abstracto. Podríamos conjeturar que la enseñanza tradicional no va en la dirección de un crecimiento favorable de las funciones ejecutivas que sirven de fundamento al desarrollo del pensamiento matemático (Radford y André, 2009).

Diversidad de estudios señalan que una buena comprensión del concepto de valor posicional es crucial para el aprendizaje matemático (Chan, 2014; Chan, Au y Tang, 2014; Chan y Ho, 2010; Wearne y Hiebert, 1994), ya que la comprensión del valor posicional de los niños predice su desempeño en la comprensión del número (McCloskey, 1992), en el cálculo aritmético (Ho y Cheng, 1997), y en la resolución de problemas matemáticos (Collet, 2003; Dehaene y Cohen, 1997; Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter y Fennema, 1997). Además, mencionan que los niños con una comprensión parcial del concepto de valor posicional son propensos a dificultades de aprendizaje matemático (Chan y Ho, 2010; Chan et al., 2014; Hanich, Jordan, Kaplan y Dick, 2001; Jordan y Hanich, 2000), pero que, con capacitación en el concepto de valor de posición, los niños mejoran su rendimiento aritmético (Fuson, 1990; Fuson y Briars, 1990; Ho y Cheng, 1997; Jones, Thornton y Putt, 1994). Así pues, el valor posicional ocupa un lugar trascendental en la educación matemática en la infancia.

> El pensamiento matemático va más allá del aprendizaje memorístico de contenidos en el aula.

A pesar de la relevancia del valor posicional, en la investigación en educación matemática (Baroody, 1990; Baturo, 2002; Chandler y Kamii, 2009; Fuson, et al., 1997; Varelas y Becker, 1997), se ha encontrado bastante evidencia para sostener que los estudiantes, particularmente de los primeros grados de educación, tienen grandes dificultades para desarrollar una comprensión esencial del valor posicional; hay consenso frente a que los niños lo encuentran difícil para aprender, y los profesores difícil de enseñar.

Lo anterior concuerda con las observaciones preliminares realizadas en las aulas objeto de análisis en el trabajo de Angulo, Pulido y Molano (2017), quienes evidenciaron dificultades en la lectura y escritura de los números, en el reconocimiento del valor de una cifra de acuerdo a la posición que ocupa en un numeral, en el cambio de una decena a otra, en representar números de dos o más cifras, particularmente cuando el número tiene ceros intermedios, en el conteo por unidades compuestas, en el establecimiento de relaciones de orden, seriaciones y secuencias, y en las operaciones de adición y sustracción con números de varios dígitos.

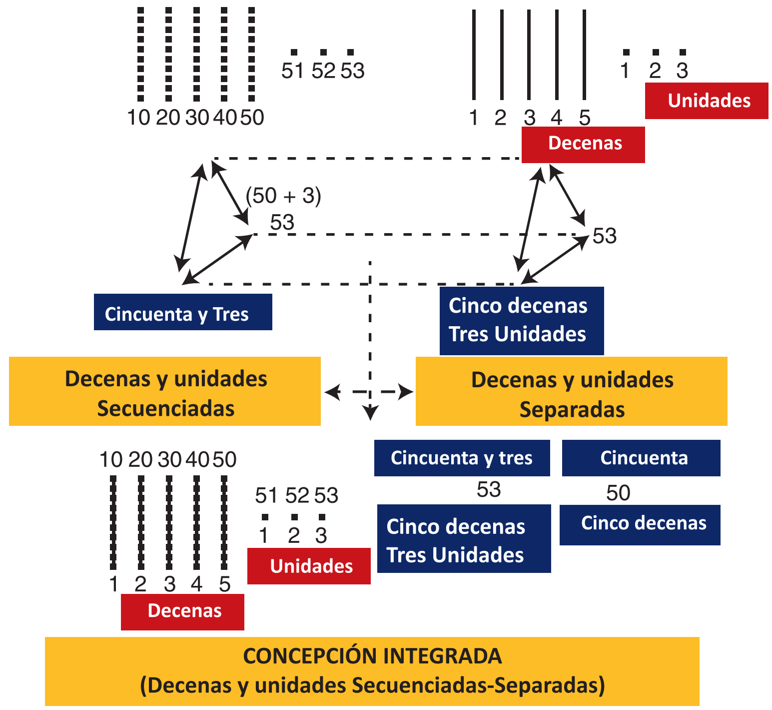
A partir del reconocimiento de tales dificultades surgieron inquietudes acerca de estrategias de enseñanza que pudieran ayudar a superarlas, especialmente aquellas referidas al aprendizaje del concepto de valor posicional. Así, los autores del mencionado estudio se propusieron el objetivo de diseñar, implementar y evaluar estrategias de enseñanza que favorecieran la comprensión del valor posicional. El documento que se presenta aquí se enriquece con el marco teórico y hallazgos de tal estudio.

La comprensión del concepto de valor posicional

En la educación de los niños de escuela primaria, gran parte del tiempo que se invierte en el estudio de las matemáticas es dedicado al Sistema Decimal de Numeración (SDN) y al concepto de valor posicional, ya que se cree que su comprensión favorece el desarrollo del pensamiento numérico, las destrezas de cálculo mental y estimación, y permite comprender las operaciones con números de varios dígitos (Angulo, Pulido y Molano, 2017).

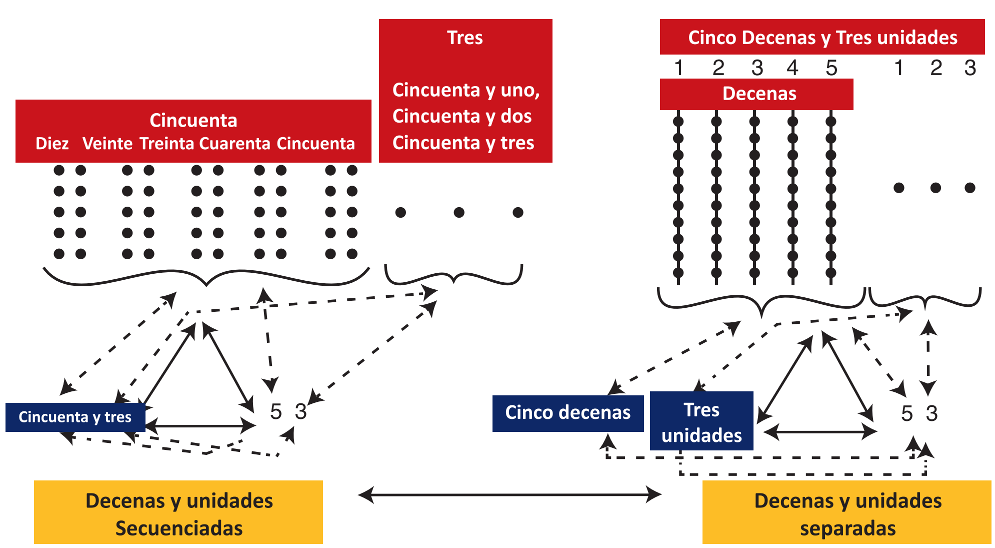
En el ámbito de la educación matemática de la primera infancia, la NRCNA (2015) identifica dos áreas fundamentales: el número, y la geometría y la medición. En el área del número, una idea clave es que "Podemos representar números de contar arbitrariamente grandes de una manera eficiente y sistemática, mediante el notable sistema decimal de numeración (de base 10)" NRCNA (2015, p. 32). Una comprensión esencial del valor posicional implica reconocer que "cada posición en un número representa una potencia de diez, y que cada dígito del número tiene un valor dependiendo

Figura 2. Nivel 3: Concepto experto de decena.



Descriptor:
El estudiante ha adquirido una comprensión esencial de la decena, puede realizar operaciones de suma y resta, y utiliza flexiblemente ambas concepciones.

Figura 3. Nivel 2. Concepto intermedio de decena



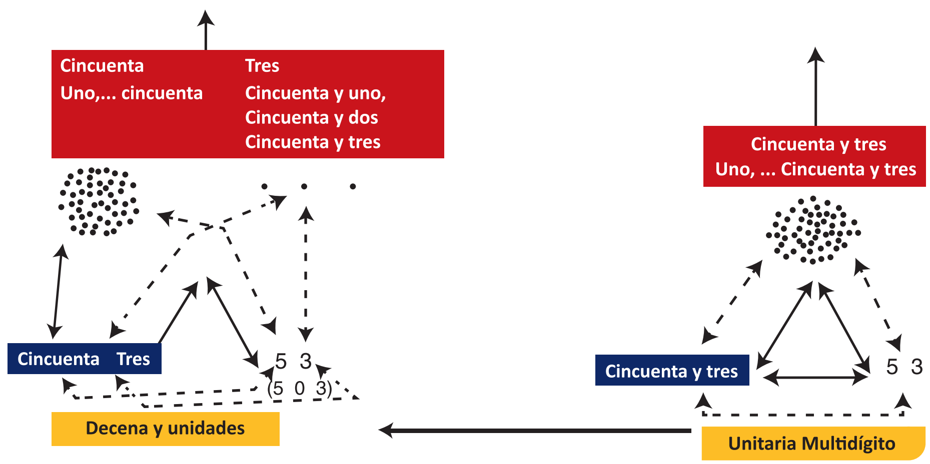
Descriptor:
El estudiante comprende la decena como una unidad compuesta por unidades simples, pero depende de representaciones para las unidades compuestas.

de su posición" (Chan, Au, Lau y Tang, 2017, p. 123). Así, el desarrollo del concepto de valor posicional está "asociado a la acción de contar con unidades de conteo simples o complejas y con la reunión, la separación, la repetición y la repartición de cantidades discretas." (MEN, 2006, p. 59).

Como lo sustentan Fuson et al. (1997), el desarrollo de tal comprensión requiere que los niños construyan estructuras conceptuales, que les permitan relacionar los nombres de los números, con las representaciones escritas y con las cantidades; tales estructuras se asumen como concepciones de los números de dos dígitos: *unitaria multidígito*, *decenas y unidades, decenas y unidades secuenciadas, decenas y unidades separadas,* y la concepción integrada *decenas y unidades secuenciadas-separadas*.

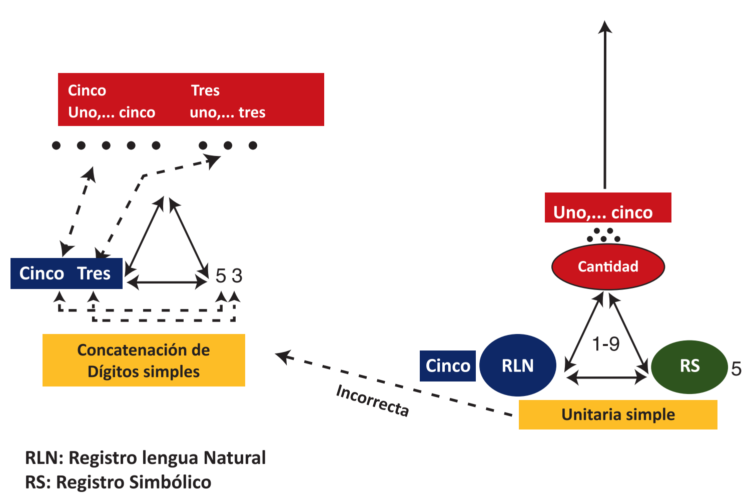
Para que el estudiante comprenda la base 10, es preciso que progrese en el uso de las concepciones, desde la unitaria, hasta el uso integrado y coordinado de las decenas y unidades secuenciadas-separadas (Fuson et al., 1997; Angulo, Pulido y Molano, 2017). Si las concepciones no se consolidan lo suficiente, no sirven de base a las siguientes; es por esta razón que resulta imposible para algunos niños de primer grado comprender el valor de posición (Chandler y Kamii, 2009).

Figura 4. Nivel 1. Concepto inicial de Decena



Descriptor:
El estudiante no ve la decena como una unidad (ni compuesta, ni simple). Coincidiendo con la concepción unitaria multidígito, el estudiante se centra en los elementos individuales que forman la decena.

Figura 5. Nivel 0. Concepto no desarrollado



Descriptor:
El estudiante no ha desarrollado una concepción de decena o esta es errónea.

Habilidades asociadas a la adquisición y desarrollo del concepto de valor posicional

Jones, Thornton, Putt, Hill, Mogill, Rich y Van Zoest (1996), observaron que la comprensión del concepto de valor posicional requiere el desarrollo de cuatro habilidades: *contar, hacer particiones, agrupar* y *relacionar números*.

Figura 6. Habilidades asociadas a la adquisición y desarrollo del concepto de valor posicional

Conteo

Se requiere pasar de usar como unidades de conteo las unidades (1, 2, 3, ...) a usar las decenas o centenas como unidades iterables (1 decena, 2 decenas,...) para finalmente usar una estrategia de conteo coordinando unidades, decenas, centenas, ...

Partición

Representar un número como la composición de otros.
Nivel inicial: forma canónica (en unidades y decenas), pero una comprensión esencial requiere particiones o descomposiciones no estándar.
Sin material concreto se requiere de un nivel de abstracción mayor para establecer la relación parte-parte-todo (Fiscner, 1990).

Agrupamiento

Se inicia usando material concreto, para pasar luego a cantidades menos tangibles (más de dos dígitos).
Una dificultad tiene que ver con la percepción de utilidad por parte de los estudiantes al realizar los agrupamientos, y sobre la toma de decisión para hacerlos.

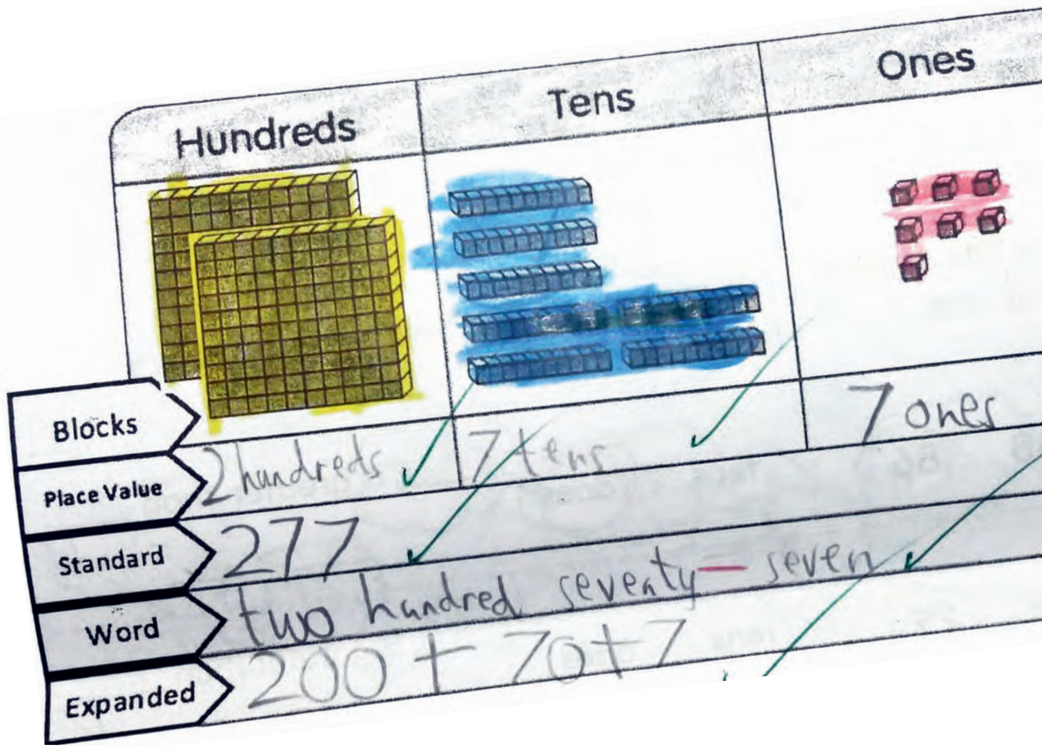
Relaciones entre números

La comparación de magnitudes no se realiza sólo linealmente sobre la secuencia numérica. Para números de varios dígitos, se requiere hacer la comparación por unidad de agrupamiento (decenas, centenas, ...)

Tabla 1. Matriz de las habilidades asociadas a la adquisición y desarrollo del concepto de valor posicional

Habilidad/ Nivel	Nivel 1 Previo al valor posicional	Nivel 2 Inicio del valor posicional	Nivel 3 Desarrollo del valor posicional	Nivel 4 Extensión del Valor posicional	Nivel 5 Esencia del Valor posicional
Conteo	El estudiante puede contar, de uno en uno, a partir de la cantidad dada. También puede contar informalmente de diez en diez.	El estudiante es capaz de contar decenas como si fueran unidades sencillas (Diez, veinte, treinta, etc.). Formar y contar decenas y unidades simples. Además, puede contar, cuando se le presentan por separado, decenas y unidades.	El estudiante es capaz contar progresiva o regresivamente para sumar o restar mentalmente.	El estudiante es capaz de contar progresivamente ("contar desde") usando unidades decenas y centenas; usa decenas para resolver sumas mentalmente.	El estudiante cuenta progresiva o regresivamente usando centenas, decenas y unidades para sumar o restar mentalmente.
Partición	El estudiante es capaz de formar de diferentes maneras números como el "cinco", el "ocho" o el "diez".	El estudiante puede formar de diferentes maneras números de dos dígitos, sobre todo en agrupaciones de decenas y unidades. También hace partición de una centena en decenas.	El estudiante forma números de diferentes formas (canónicas o no), usualmente menores que cien. También puede determinar lo que le falta a una cantidad en comparación con otra.	El estudiante forma números de varios dígitos (hasta el mil) de diferentes maneras (Canónica o no canónica); también determina lo que le falta a una cantidad de tres dígitos en comparación con otra.	El estudiante forma números de varios dígitos, incluso mayores que 1000, de diferentes formas (canónicas o no canónicas).
Agrupamiento	El estudiante puede estimar el número de objetos en un grupo utilizando el 10 y el 5 como referencias, contar de cinco en cinco o de diez en diez, y hacer agrupamientos en colecciones para contar fácil y rápidamente.	El estudiante estima el número de objetos en un grupo usando una unidad apropiada; recurre al conteo para corroborar si su estimación es correcta, y agrupa para facilitar la verificación.	El estudiante puede determinar si la suma de dos números está dentro del rango de alguna decena (Ej. Si la suma 18 + 19 está dentro de la decena del treinta).	El estudiante puede determinar si la suma o diferencia de dos números, de dos o tres dígitos, es mayor o menor que otro número. También determina, sin usar material concreto, cuántas unidades se forman con una combinación de decenas y unidades. (Ej. 23 decenas y 15 unidades son 245 unidades).	El estudiante puede determinar si la suma o diferencia de dos números, de dos o tres dígitos, es mayor o menor que otro número. Asimismo, encuentra, sin usar material concreto, la cantidad de unidades que se forman con una combinación dada de centenas, decenas y unidades. (Incluso si no es canónica.)
Relaciones entre números	El estudiante determina si un número (entre el 0 y el 10) es mayor o menor que 5 o 10, y también qué tan mayor o menor es ("mucho" o "poco").	El estudiante ordena números de dos dígitos por decenas (establece relaciones "es mayor que" y "es menor que" Ej. 35 > 25, porque 3 decenas < 2 decenas) o entre decenas (Ej. 35 < 37).	El estudiante ordena números de dos dígitos (establece relaciones de orden); establece la relación correcta cuando se invierte el orden de los dígitos del numeral. (Ej. 35 < 53)	El estudiante ordena números de varios dígitos (<1000), incluso aquellos formados al intercambiar los dígitos.	El estudiante ordena números de varios dígitos y determina cuál de ellos se encuentra más cerca de otro.

A partir de estas cuatro habilidades, Jones et al. (1996) diseñaron y validaron un marco para la enseñanza y evaluación del sentido numérico "*multidígito*"; la perspectiva que se presenta aquí como modelo teórico del desarrollo de la comprensión del valor posicional, es tomada de Angulo, Pulido y Molano (2017, p. 6) quienes realizaron una adaptación de la presentada en Jones et al. (1996, p. 313).



Al leer la anterior matriz analítica por filas, se consigue una descripción del desarrollo de cada habilidad; entretanto, un análisis por columnas permite hacer descripciones de la comprensión del valor posicional esperada en cada nivel (Véase Angulo, Pulido y Molano, 2017). Se destaca el hecho de que los niveles son consistentes: si un niño puede resolver un problema de cierto nivel, también puede resolver los de niveles anteriores; de igual forma, si es incapaz de responder un problema de cierto nivel, tampoco puede resolver los de niveles superiores. Así mismo, cuando un estudiante es capaz de resolver algún problema de cierto nivel asociado a alguna de las cuatro habilidades, también puede resolver problemas relativos a las otras habilidades del mismo nivel.

Hacia las estrategias didácticas

Las dificultades que presentan los estudiantes, en relación con el valor posicional, se pueden ver acentuadas por estrategias pedagógicas que en ocasiones buscan estandarizar y homogenizar a través del uso de materiales que puedan manipular los estudiantes, pero sin un fundamento pedagógico y didáctico claramente establecido; o bien, porque se enseña el valor posicional como el lugar en el que se deben ubicar las unidades, decenas y centenas, pero no como el valor que adquieren las cifras de acuerdo a su posición relativa.

Ello pone de presente la necesidad de que el profesor propicie que el concepto de valor posicional se incorpore a las estructuras cognitivas de los estudiantes, mediante el uso de representaciones concretas, pictóricas o simbólicas. Es necesario que el profesor en su trabajo de aula lleve a los estudiantes a comprender el valor posicional de las cifras en una expresión numérica, en el contexto de la resolución de problemas de estructura aditiva o multiplicativa y que potencie la capacidad de composición y descomposición aditiva y multiplicativa, requeridas en la comprensión de los significados de las expresiones numéricas. Así: "Un acompañamiento pedagógico paciente y progresivo de los estudiantes puede lograr que la gran mayoría de ellos logre la proeza de recorrer doce milenios de historia del pensamiento numérico en solo doce años de escolaridad" (MEN, 2006, p. 61).

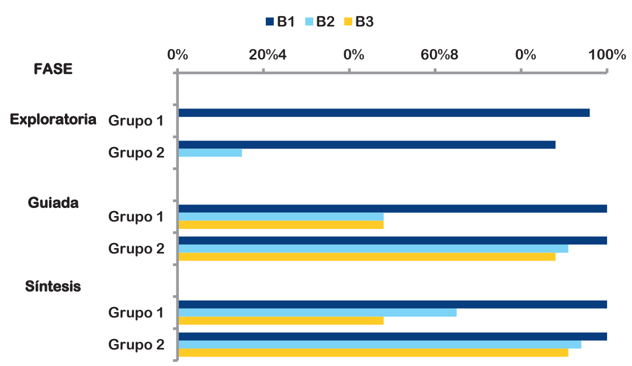
Precisamente desde ese enfoque de acompañamiento progresivo, y dado el propósito de favorecer la comprensión del valor posicional, en el marco del estudio de Angulo, Pulido y Molano (2017) se diseñaron e implementaron estrategias de enseñanza que asumieron el marco conceptual sobre la comprensión del valor posicional en términos del desarrollo gradual de habilidades, y de la construcción progresiva de unidades (simples o compuestas) para incrementar la flexibilidad en el *conteo*, en la *realización de particiones*, en la *agrupación* y en la *comparación* de cantidades. Las estrategias, que se integraron en una unidad didáctica diseñada desde el marco de la EpC (Blythe, 1999), se exponen puntualmente:

- Caracterizar detalladamente las comprensiones y niveles de desarrollo esperados, a través de un "diseño inverso" del proceso de estudio: Se definen metas de comprensión, se analizan e identifican las evidencias necesarias para determinar el logro de las metas, y se proponen los desempeños de comprensión que permitirían recabar tales evidencias.
- Organizar el currículo asociado al desarrollo del pensamiento numérico en "espiral". Esto implica propiciar el desarrollo de habilidades en espiral por círculos numéricos.
- Diseñar las actividades en la secuencia dada por las estructuras conceptuales de la decena.
- Incluir desempeños específicos (actividades) para promover el desarrollo de cada habilidad.
- Investigar los errores y dificultades, para identificar grupos de estudiantes que comenten en el mismo tipo de error, con el propósito de diseñar tareas especialmente para aquellos estudiantes y trabajar en subgrupos.
- Tener como eje central la resolución de problemas verbales de estructura aditiva o multiplicativa.
- Promover el uso de algoritmos alternativos a los usuales para la adición y sustracción, y generar explicaciones de los mismos.
- Siempre tener a disposición material concreto (bloques base 10, legos, cubos apilables, frijoles, cuentas, etc.) para apoyar a los estudiantes con mayores dificultades en el proceso de abstracción reflexiva. Con el fin de promover la producción de representaciones desde el nivel concreto hasta lo simbólico, siguiendo la secuencia sugerida por Angulo y Herrera (2009).

Algunos resultados de la implementación de estrategias

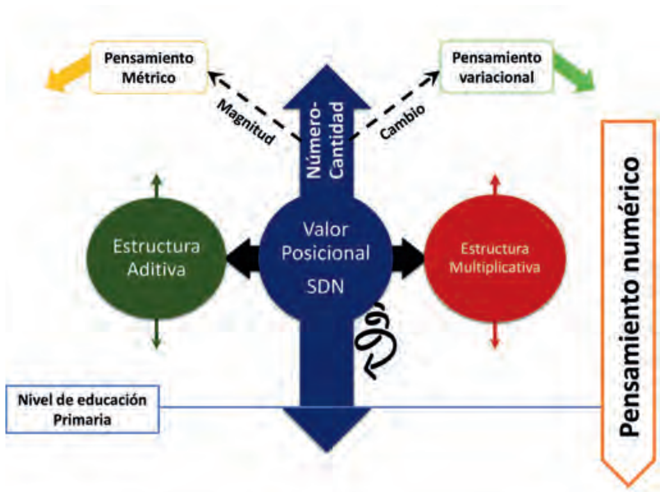
En Angulo, Pulido y Molano (2017) se reportan con detalle los resultados de implementar las estrategias descritas, a manera de ejemplo se presenta el avance (a través de tres fases) de los estudiantes en la comprensión de la decena.

Figura 7. Avances en comprensión de la Base 10



Código B1. "Se centra en cada uno de los elementos de una colección por separado"
Código B2. "Ve el número 10 como una colección de objetos, suma y resta y lo expresa verbalmente, pero no elabora una representación simbólica".
Código B3. "Ve el número 10 como una colección de objetos, suma y resta y lo representa simbólicamente". "Los códigos generan grupos no excluyentes".

Figura 8. Valor posicional



Reflexiones finales

El trabajo de investigación confirma la complejidad del aprendizaje y enseñanza del concepto de valor posicional, pero al mismo tiempo ofrece la posibilidad de hacer frente a las dificultades más frecuentes y algunos estudiantes logran superarlas. Las estrategias diseñadas muestran que los elementos teóricos de diseño (tópico generativo, metas de comprensión, desempeños de comprensión y valoración continúa) enmarcados en una estructura organizada y flexible, satisfacen las necesidades de los profesores en el salón de clase, lo cual contribuyó a que los estudiantes lograran avances en la comprensión del concepto de valor posicional. En el curso de su implementación se evidenciaron diferentes estrategias de conteo, partición, agrupación y comparación de cantidades, a partir de lo cual, se logró establecer el nivel de desarrollo de habilidades asociadas al concepto de valor posicional con el que iniciaron los estudiantes y su progreso (Angulo, Pulido y Molano, 2017).

Los niños están en contacto con las nociones matemáticas desde muy pequeños, en la relación diaria con su entorno, a través del lenguaje que comparten con sus padres, familia, profesores, entre otros. No se puede pensar que solo tienen acceso a estas nociones al ingresar al jardín. Ellos escuchan y hablan sobre los números, pesos, tamaños, cantidades,…; en los juegos comparan, agrupan, separan y realizan operaciones sencillas, pero básicas. Ese necesario análisis sobre los conocimientos previos es central en cada esfuerzo para promover una compresión esencial del valor posicional, es decir, tales experiencias no pueden omitirse en la escuela, cuando llegan los niños a las aulas, es deber del profesor, reconocerlas, analizarlas, retomarlas y fortalecerlas.

Favorecer la comprensión del valor posicional, implica establecer estrategias didácticas que permitan fortalecer las habilidades previas, por ello no se debe abordar solo en uno o dos grados: las habilidades previas de conteo, partición, agrupación y comparación de cantidades se deben abordar desde la primera infancia y en los cursos sucesivos. En ese sentido, se llama la atención sobre la extensión en el tiempo que requiere la comprensión de valor posicional. Se recomienda organizar la enseñanza y el aprendizaje del valor posicional por "ciclos en espiral": en un primer ciclo proponerse llegar al nivel 1, en un segundo ciclo, avanzar hasta el nivel 3; luego hacer un ciclo para el cuarto nivel, y finalmente hacer uno para el nivel de comprensión esencial, tales ciclos podrían estructurarse en tres fases cada uno, en concordancia con el marco de EpC.

Esta reflexión sobre la organización curricular del valor posicional, puede conllevar una revisión de los programas curriculares de matemáticas, revisión que plantea el reto adicional de integrar la comprensión de este aspecto específico del pensamiento numérico, con el desarrollo de habilidades asociadas a otros dominios del pensamiento matemático (variacional, geométrico, métrico, aleatorio). En ese sentido, la comprensión y uso flexible del concepto de valor posicional, pueden ser vistos como "motores" para desarrollo de otras habilidades y aprendizajes; por ejemplo, al priorizar la enseñanza y aprendizaje del valor posicional, sobre los algoritmos de las operaciones básicas, es posible favorecer las habilidades "duales" de agrupar-partir, descomponer-recomponer, que son nucleares tanto en la estructura aditivia, como en la multiplicativa.

Las anteriores reflexiones suscitan dos interrogantes que considero deben seguir discutiéndose en el ámbito de la educación matemática en la infancia: ¿cuáles son las comprensiones matemáticas esenciales que esperamos en esta etapa escolar? y ¿cómo se pueden articular esas comprensiones con las esperadas en otros dominios del conocimiento?

> "Diversidad de estudios señalan que una buena comprensión del concepto de valor posicional es crucial para el aprendizaje matemático"

REFERENCIAS

Angulo, A. y Herrera, L. (2009). *El aprendizaje de nociones matemáticas básicas por parte de personas con discapacidad intelectual. Una propuesta para la enseñanza del núcleo temático "Estructura Aditiva" haciendo uso del software*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Angulo, A., Pulido, N. y Molano, E. (2017). Estrategia de enseñanza para favorecer la comprensión del valor posicional. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *6*(1), 1-31.

Baroody, A. (1990). How and when should place-value concepts and skills be taught?. *Journal for research in mathematics education*, *21*(4), 281-286.

Baturo, Annette R (2002) Number sense, place value and "odometer" principle in decimal numeration: Adding 1 tenth and 1 hundredth. En Cockburn, Anne D. y Nardi, Elena, Eds. *Proceedings 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 2, pages pp. 65-72, Norwich, UK.

Blythe, T. (1999). *La enseñanza para la comprensión: guía para el docente*. Argentina: Paidós.

Bravo, J. A. F. (2010). Neurociencias y enseñanza de la matemática. Prólogo de algunos retos educativos. *Revista Iberoamericana de educación*, *51*(3), 1-12.

Chan, W. L (2014). Understanding and processing numbers among Chinese children. *Psychology y Neuroscience*, 7, 583–591.

Chan, W. L., Au, T. K. y Tang, J. (2014). Strategic counting: A novel assessment of place-value understanding. *Learning and Instruction*, 29, 78–94.

Chan, W. L., Au, T. K., Lau, T. y Tang, J. C. (2017). Counting errors as a window onto children's place-value concept. *Contemporary Educational Psychology*. 51, 123–130.

Chan, W. L. y Ho, C. S. H. (2010). The cognitive profile of Chinese children with mathematics difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, 107, 260–279.

Chandler, C., y Kamii, C. (2009). Giving Change When Payment Is Made with a Dime: The Difficulty of Tens and Ones. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(2), 97-118.

Collet, M. (2003). Diagnostic assessment of the understanding of the base-tensystem. *Paper presented at the symposium current issues in assessment of learning disabilities of the congress of the European Federation of Psychologists Associations (EFPA)*, Vienna.

Dehaene, S., y Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex,* 33, 219–250. http://dx.doi.org/10.1016/S0010-9452(08)70002-9

Delazer, M., Domahs, F., Bartha, L., Brenneis, C., Lochy, A., Trieb, T. y Benke, T. (2003). Learning complex arithmetic-an fMRI study. *Cognitive Brain Research 18*, 76-88.

Fischer, F. (1990). A Part-Part-Whole Curriculum for Teaching Number in the Kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 207-215. doi:10.2307/749374

Fuson, K. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction, and place value. *Cognition and Instruction*, 7, 343–403. http://dx.doi.org/10.1207/s1532690xci0704_4.

Fuson, K. y Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 180–206.

Fuson, K., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H., Human, P., Olivier, A., Carpenter, T. y Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 130-162. doi:10.2307/749759

Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., y Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology,* 93, 615–626. http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.93.3.615.

Ho, C. S., y Cheng, F. S. (1997). Training in place-value concepts improves children's addition skills. *Contemporary Educational Psychology*, 22, 495–506.

Jones, G., Thornton, C. y Putt, I. (1994). A model for nurturing and assessing multidigit number sense among first grade children. *Educational Studies in Mathematics,* 27, 117–143.

Jones, G., Thornton, C., Putt, I., Hill, K., Mogill, T., Rich, B., y Van Zoest, L. (1996). Multidigit number sense: A framework for instruction and assessment. *Journal for research in mathematics education*, 27(3), 310-336.

Jordan, N., y Hanich, L. (2000). Mathematical thinking in second grade children with different forms of LD. *Journal of Learning Disabilities,* 33, 567–578. http://dx.doi.org/10.1177/002221940003300605

McCloskey, M. (1992). Cognitive mechanisms in numerical processing: Evidence from acquired dyscalculia. *Cognition*, 44, 107–157.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias.* Bogotá: Magisterio.

National Research Council of the National Academies (2015). Contenido matemático fundacional para el aprendizaje en los primeros años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia,* 4(2), 32-60

Radford, L., y André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *12*(2), 215-250.

Schoenfeld, A. (1992: 2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370.

Varelas, M., y Becker, J. (1997). Children's Developing Understanding of Place Value: Semiotic Aspects. *Cognition and Instruction,* 15(2), 265-286.

Wearne, D., y Hiebert, J. (1994). Place value and addition and subtraction. *The Arithmetic Teacher*, 41, 272–274.

“La vuelta al mundo con la **geometría**”,

situación que promueve el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos.

Pixabay.com. (2018). Recuperado de https://bit.ly/2C2FtFJ y https://bit.ly/2QySzPa

Se pretende dar a conocer una experiencia de aula realizada en el Gimnasio de los Cerros durante las clases de geometría con miras a fortalecer el pensamiento espacial en estudiantes de tercero de primaria. Para ello, se establece una propuesta que está fundamentada desde los aportes teóricos de Dickson (1991)—al hablar del estudio de los objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características físico-visuales para proporcionar experiencias tangibles del mundo—desarrollando así la habilidad espacial en los estudiantes, que reconocerán la representación bidimensional del mundo físico que nos rodea a través de material manipulativo-tangible y gráfico-textual (Godino, 2006). De esta manera, se proporciona una experiencia de aprendizaje efectiva. Esta metodología de enseñanza se ve enmarcada en una situación problema fundamental (Brousseau, 1986), en la que el grupo de estudiantes deberá viajar por cinco países para reconocer cuatro sólidos relacionados con las obras y maravillas de cada país, y finalizar con una obra de arte que relaciona los sólidos.

Palabras clave
Enseñanza de la geometría, Pensamiento espacial, Materiales manipulativos, Niveles de Van Hiele

Camilo **Arévalo Vanegas**

Profesor de matemáticas del Gimnasio de los Cerros.

Esta experiencia tiene como principal objetivo reivindicar al aula de matemáticas como un espacio de experiencias reales gracias al uso de recursos didácticos que faciliten la enseñanza y aprendizaje de la geometría en estudiantes de educación primaria. Desde la propuesta de Godino (2006) y su clasificación de los materiales didácticos en manipulativos tangibles, gráfico textuales y ayudas al estudio, se pretende un análisis exhaustivo de las funciones y ayudas que brindan dichos materiales en la adquisición de nuevos conocimientos geométricos por parte de los estudiantes, desde el trabajo con su entorno y la manipulación de materiales.

Para ello, se establece una situación fundamental desde lo planteado por Brousseau (1986) en su teoría de las situaciones didácticas, donde el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno debe descubrir y, además, por medio del planteamiento y la sistematización de la experiencia, usar para construir nuevas experiencias a partir de su trabajo.

Ahora bien, el reto era planear una propuesta de enseñanza de la geometría para estudiantes de tercero, enfocada en el desarrollo del pensamiento espacial y el conocimiento de los sólidos geométricos y las figuras planas desde los aportes de Dickson (1991), empezando por el estudio de los objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características físico-visuales, para proporcionar el camino hacia el aprendizaje de las representaciones bidimensionales de estos objetos tridimensionales, desarrollando así el pensamiento espacial al reconocer en el contexto del estudiante el mundo geométrico que lo compone.

Los lineamientos curriculares de matemáticas, particularmente los que aluden a las representaciones geométricas, promueven la exploración por parte del estudiante y producen la comunicación oral y escrita de ideas matemáticas, verificando, negociando y validando las afirmaciones puestas en juego dentro de procesos de socialización (MEN, 1998). Sin embargo, su aprendizaje se ve perjudicado porque se centra en representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales que se usan ocasionalmente para resolver algunos problemas y, además, no se toman en cuenta los procesos de argumentación que se ponen en juego en los espacios de socialización del aula de clase.

Fundamentación teórica

En la enseñanza de la geometría, los sólidos y sus propiedades se manejan sin mayor profundidad, privilegiando lo bidimensional sin llegar a comprender y establecer el paso de lo bidimensional a lo tridimensional o viceversa. En los estándares de matemáticas se reconoce esta problemática y la importancia de desarrollar una "geometría activa" que privilegie

> la exploración de figuras mediante el movimiento, empezando por el propio cuerpo, como cuando el niño recorre la frontera de una figura y pasando por el que se aplica a los objetos físicos, para estudiar los efectos que se producen en la figura que comportan y las relaciones entre productos de estos movimientos y de manera muy parcial, entre los mismos movimientos (MEN, 1998).

Con respecto a la enseñanza de la geometría espacial para niños preescolares, varios autores proponen que debe hacerse partiendo de las figuras tridimensionales y su comparación con los objetos físicos de la realidad, hacia la geometría bidimensional trabajada como atributo de la geometría tridimensional, o a lo que Dickson (1991) se refiere cuando habla de la representación bidimensional del espacio tridimensional:

> A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias que se proporcionan a los estudiantes son bidimensionales, nos valemos de libros matemáticos que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales, tal uso de dichos dibujos le supone al estudiante una dificultad adicional en el proceso de comprensión.

Para que los estudiantes vayan identificando las características bidimensionales que tienen los objetos tridimensionales, se debe comenzar por la interacción y la percepción del mundo físico que los rodea, donde "la percepción es el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos y la representación es una evocación de los objetos en ausencia de ellos" (Piaget, 1964); se pretende así que construyan esquemas mentales del objeto cuando se le hacen transformaciones, es decir acciones como rotar, trasladar, girar, ordenar, moldear, cortar, pegar etc. Es aquí donde se hace imprescindible el uso de recursos didácticos para el estudiante.

Recursos didácticos

En la enseñanza de las matemáticas y en el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial, es importante tener en cuenta los métodos que utilizan los maestros para lograr los propósitos educativos, así como los medios a los que acuden y que otorgan a los estudiantes para facilitar su proceso de aprendizaje. A continuación se presenta la clasificación que hace Godino (2006) de los recursos didácticos (Ver tabla 1):

Tabla 1. Clasificación de los recursos didácticos según Godino (2006, Págs. 117-124)

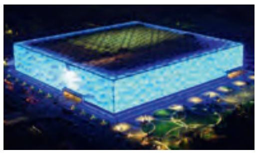
Instrumentos semióticos: Son los medios por los cuales se mediatiza entre la acción del sujeto ante el intento de resolver una situación-problema y el contexto en el que se desarrolla.	
Manipulativos tangibles	Gráfico-textuales-verbales
Son los objetos físicos que sirvieron para identificar características propias de los sólidos y que ponen en juego la percepción táctil. *Sólidos construidos por los estudiantes y docentes* *Materiales para caracterizar propiedades del sólido (Palillos y plastilina)*	Son los recursos en los que se hace presente la percepción visual y/o auditiva. *Videos e imágenes de los frecuentes viajes alrededor del mundo geométrico.*

Diseño y metodología de investigación

Diseñar actividades que despierten el interés y la motivación de adquirir nuevos y útiles conocimientos no es tarea fácil, de este modo "*La vuelta al mundo con la geometría*" es la justificación perfecta para cautivar la atención de los estudiantes y proporcionarles experiencias de aula innovadoras en el estudio de las matemáticas, proponiendo el aprendizaje de la geometría espacial a partir de las figuras tridimensionales y su comparación con los objetos físicos de la realidad, hasta llegar a la geometría bidimensional trabajada como propiedades de la geometría tridimensional, también conocida como representación bidimensional del espacio tridimensional. Por tal razón, la resolución de problemas es un método de inagotables recursos dado que cada experiencia con problemas matemáticos posibilita la retroalimentación de experiencias pasadas, genera la sistematización de nuevas prácticas dotándolas de creatividad y en espacios de socialización desarrolla una conciencia crítica en los estudiantes.

El desafío estaba en planear, diseñar y ejecutar una propuesta de enseñanza enfocada en el pensamiento espacial, los sólidos geométricos y las figuras planas empezando por el estudio de objetos

Figura 1. Secuencia de sólidos y países

1. Cubo	2. Paralepípedo	3. Pirámide	4. Esfera	5. Galería
				
Cubo de agua en China	Torre Picasso en Madrid	Pirámide de Giza en Egipto	Esfera de piedra en Costa Rica	Galería de arte geométrico en Colombia

tridimensionales, analizando sus propiedades y características para proporcionar el camino hacia el aprendizaje de las representaciones bidimensionales de dichos objetos, ya que es común que se utilicen libros de matemáticas que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales, y usar estos gráficos produce en el estudiante una dificultad adicional en el proceso de comprensión. (Dickson, 1991).

Desde la propuesta de Brousseau (1986), quien propone que "…el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno debe descubrir…", se estableció una metodología de enseñanza enmarcada en una situación problema fundamental (Brousseau, 2011), explícitamente una situación motivacional en la que los estudiantes viajaron por cuatro países y desde allí reconocieron cuatro sólidos relacionados con maravillas de un país (Ver figura 1), finalizando con una galería de arte que relaciona los sólidos, sus características y propiedades.

El diseño de la situación y la evaluación del impacto y pertinencia del uso de recursos didácticos se evidenciará a partir de las categorías de análisis del modelo Van Hiele (1984) y Hoffer (1981), que pretende establecer que la geometría es aprendida por una secuencia de niveles de pensamiento que se caracterizan por ser progresivos y ordenados, donde sólo al dominar o alcanzar un nivel se puede pasar al siguiente. Van Hiele (1984) plantea cinco niveles para la enseñanza de la geometría: *Nivel 0,* visualización o reconocimiento; *Nivel 1,* análisis; *Nivel 2,* Ordenación o clasificación; *Nivel 3,* Deducción formal, y *Nivel 4,* Rigor.

Atendiendo al intervalo de edad en el que se encuentran los estudiantes (7-8 años), podemos ubicarlos, según el modelo Van hiele en el nivel de reconocimiento, con las cinco habilidades que plantea Hoffer (1981), y que deberían ser desarrollados por los niños de esta edad (Ver tabla 2):

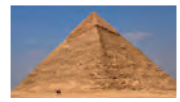
Tabla 2: Modelo Van Hiele (1984) con aportes de Hoffer (1981) para la enseñanza de geometría.

Van Hiele	Habilidades	Características
Visualización o Reconocimiento	Visual: Capacidad de crearse representaciones mentales a través de la visualización de objetos.	Reconocer figuras de un dibujo. Reconocer información contenida en una figura.
	Verbal: Habilidad de comunicación donde se da a conocer la información contenida en los objetos geométricos que ha logrado interiorizar.	Asociar el nombre correcto con una figura dada. Interpretar frases que describen figuras.
	Dibujo: Crea imágenes mentales a partir de la visualización de objetos y las traduce a representaciones externas, a partir de representaciones internas de conceptos matemáticos	Hacer dibujos de figuras interpretando las partes.
	Lógica: Desarrollar el poder de argumentación lógica, sus propias justificaciones y formulaciones.	Diferencias y similitudes entre figuras. Comprender la conservación de figuras en diferentes situaciones.
	Aplicada: Pretende que al enfrentarse a una situación problema, se utilicen estrategias de solución utilizando las demás habilidades.	Identificar formas geométricas bidimensionales en objetos físicos.

Descripción de la experiencia

En cada uno de los países a los que se viajó (Ver figura 2) debería aprenderse algo nuevo referente a la geometría, pues la idea era mostrarles construcciones en diferentes países asociadas a algunos sólidos geométricos, para que finalmente desarrollaran la capacidad de descomponer los sólidos trabajados en su sus propiedades bidimensionales, y desde allí trabajar con sus propiedades y características a través del material proporcionado.

Figura 2: Viaje por el mundo geométrico.

1. Cubo	2. Paralepípedo	3. Pirámide	4. Esfera	5. Galería
				
Viaje al cubo de agua en China	Viaje a la Torre Picasso en España	Viaje a la Pirámide de Giza en Egipto	Viaje a la Esfera de piedra en Costa Rica	Viaje a la Galería de arte geométrico en Colombia

Para simular el viaje se hacía uso de material gráfico-textual (Godino, 2006) como lo son videos e imágenes de los países y construcciones de cada lugar. Estos recursos gráfico-textuales ayudaban a involucrar al estudiante en la situación propuesta, los constantes viajes a países lejanos para mirar las imágenes de construcciones arquitectónicas en forma de sólidos producían entusiasmo para el trabajo activo con los recursos tangibles.

Se recurría a recursos tangibles y manipulativos durante todas las sesiones, los cuales correspondían a sólidos construidos, hechos por los mismos estudiantes o por el docente, y el objetivo principal era motivar al estudiante a la exploración táctil y visual de los mismos para que proporcionaran las primeras informaciones sobre las características y algunas de sus propiedades, siguiendo la idea de Piaget (1964) quien hace distinguir este proceso y dice: "la percepción es el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos, para que posteriormente la representación sea una evocación de los objetos en ausencia de ellos".

> "Proporcionar a los estudiantes experiencias y vivencias innovadoras donde logren comprender e imaginar el mundo de las matemáticas."

El objetivo después del reconocimiento de sólidos y su caracterización, era que los estudiantes estuvieran en la capacidad de descomponer los sólidos en sus propiedades bidimensionales logrando así evidenciar las formas planas que componían a un sólido.

Esta actividad, que corresponde a la última sesión, se desarrolló durante el viaje a Colombia, donde el aula de clase se convirtió en una galería de arte geométrico, simulando el arte de Omar Rayo donde se usaban figuras planas para crear valiosas y bonitas obras. En esta sesión, el estudiante debía crear su propia obra pero sin el uso de pincel, sino con los mismos sólidos anteriormente trabajados durante los viajes a los demás países, pues debían usar cada una de las caras planas de los sólidos para simular un sello y plasmarlas sobre una cartulina, evidenciando las propiedades bidimensionales de los sólidos que ya habían trabajado. De esta manera creaban sus obras con figuras planas y a la par comprendían la composición bidimensional de objetos tridimensionales.

Análisis de los resultados

La manipulación y visualización de los sólidos como lo plantea el modelo Van Hiele ayudó a reconocer algunas de sus características físicas, pues los estudiantes hacían alusión a sus bordes y sus puntas, realizaban conteos para saber cuántas puntas poseía cada sólido, cuantas caras lo constituían, etc.

En cuanto a las características físicas de un sólido como las aristas, los estudiantes empezaban a asociar esas propiedades según lo que percibían; por ejemplo, al mostrarles los vértices de la pirámide decían que ese nombre "*vértice*" era muy raro, que preferían llamarle "*punta*", lo que ayudo a su mejor reconocimiento y a saber cuántas poseía cada sólido.

Ahora bien, a las aristas (que también lo consideraban un nombre muy raro y no lo relacionaban con nada) las reemplazaban como los "*bordes*" que se podían sentir con los dedos, y finalmente las caras las reconocían como aquello sobre lo cual la pirámide podía quedar de pie, pues si se intenta ponerla de pie sobre una punta, se caía, e igualmente si se intenta pararla sobre el borde, el único lugar sobre el que queda de pie es sobre sus caras planas.

En este caso, es evidente que los estudiantes logran un desarrollo de la habilidad verbal y de comunicación, donde crean sus propias reglas para nombrar las propiedades del sólido y lograr una comprensión conjunta sobre los objetos de estudio, como cuando aludían a la esfera que no tiene caras planas ya que por donde quiera que se coloque sobre una superficie plana, nunca se pone de pie fijamente.

Finalmente, gracias a estas características que ellos de manera curiosa les atribuían a los sólidos, lograban realizar los conteos de cada uno de los vértices, caras y aristas lo que no se dificultó en ningún sentido. Reconocían igualmente la representación bidimensional de los sólidos, pues identificaban figuras como triángulos, cuadrados y círculos en las pirámides, cilindros y paralelepípedos, dibujándolas de acuerdo con la cantidad.

Ahora bien, se debe mencionar que a partir de la implementación de esta experiencia y gracias al trabajo de los estudiantes al construir los sólidos y hacer sus obras de arte, se generó una nueva experiencia que apunta a trabajar la enseñanza de los sólidos y las figuras planas desde la situación motivacional "Construyendo un muñeco Minecraft".

Conclusiones y reflexiones finales

Los materiales manipulativos tangibles ayudan a la compresión de conceptos, generando una conexión con el estudiante y permitiéndole, a partir de situaciones nuevas, adquirir conocimientos donde el material por sí mismo no es nada, sólo hasta cuando el maestro le da un enfoque para tratar conceptos y llegar al objeto de la geometría espacial. Así, la enseñanza y el aprendizaje se dota de un carácter dinámico y comprensible para el estudiante.

Uno de los aspectos que se considera valioso en la práctica es hacer que los estudiantes comprendan la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana; llevarlos a un proceso en el cual producen un pensamiento crítico y flexible gracias a las situaciones en las que se veían involucrados y a las decisiones que tomaron para poder solucionarlas.

Es importante mencionar la importancia que tienen los recursos gráfico-textuales como los videos y las imágenes interactivas, ya que en la educación matemática actual no se tienen en cuenta. Por lo que se logró en esta experiencia de aula, se puede concluir que son recursos agradables e interesantes a la vista, porque el estudiante se interesa por los procesos de aprendizaje, motiva el trabajo activo y lo involucra en una situación donde debe acceder a nuevos conocimientos gracias a la propia acción.

Uno de los aspectos que llama la atención, es que la conceptualización planteada por los estudiantes está acompañadas por gestos y palabras del lenguaje cotidiano, hasta que los conceptos son validados o institucionalizados por los estudiantes, para una futura valoración de definiciones y simbolismos formales.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G. (1997). *Teoría de las situaciones didácticas de las matemáticas*. Francia: Kluwer Académica Publisher.

Brousseau, G. (1999). *Educación y didáctica de las matemáticas*. Educación Matemática. *México, noviembre de 1999.*

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas.* Francia: Universidad de Burdeos.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: M.E.C. & Labor.

Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele*, Práctica en Educación Matemática. Sevilla: Ediciones Alfar.

Godino, J. (2009). *Uso de material tangible y gráfico textual en el estudio de las matemáticas; superando algunas posiciones ingenuas.* Machado y Cois. Portugal: Guimarães.

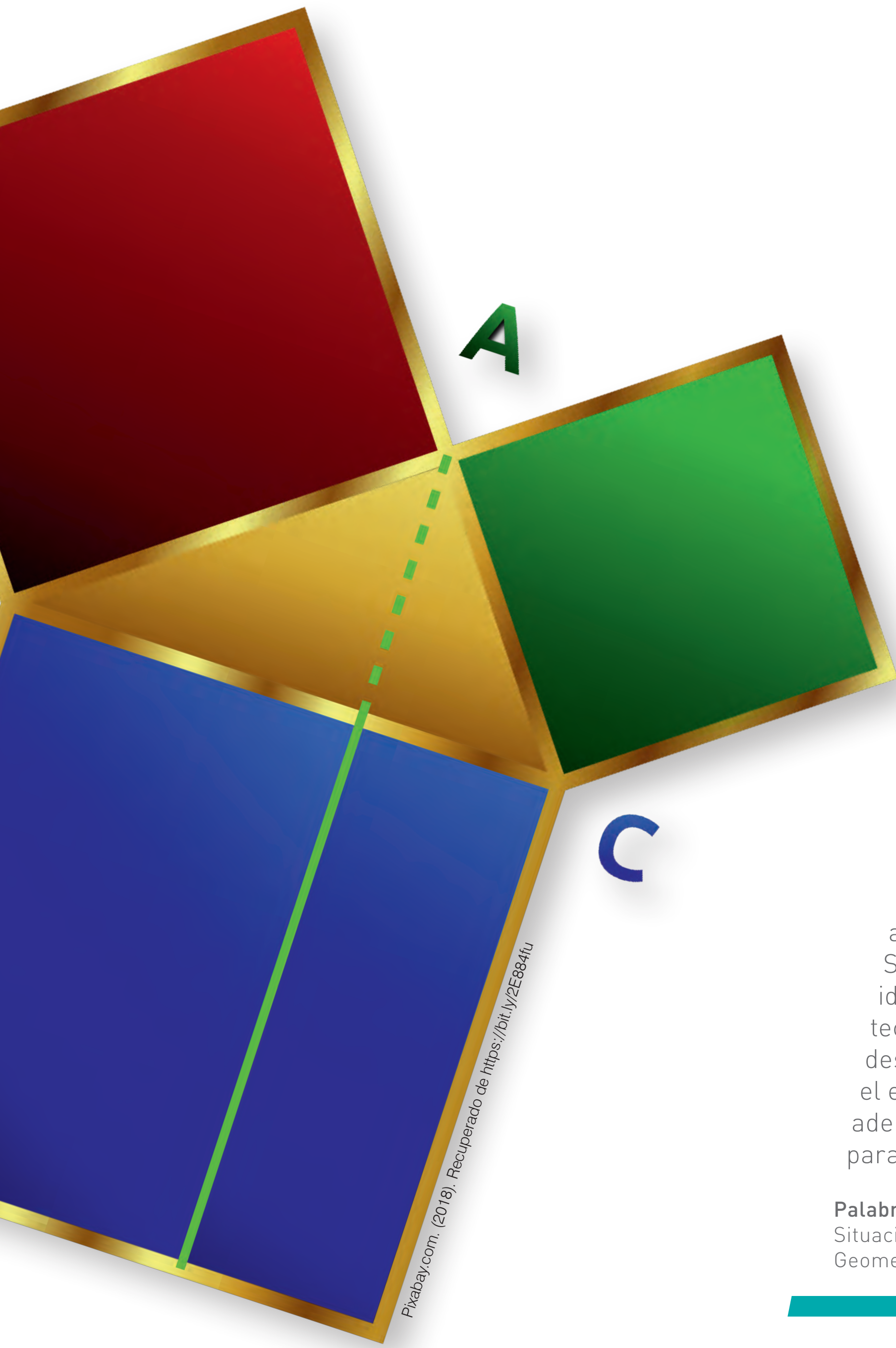
Hoffer, A. (1981). "La geometría es más que demostración". En *Notas de Matemática* Nº 29, Abril de 1990, p.p. 10-24.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales.* Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Piaget, J. (2005). La representación del espacio. Reseña del libro Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza. México: Correo del maestro y ediciones la vasija.

Van Hiele, P.M. (1984). *Estructuras y visiones. Una teoría de la educación matematica,* Londres: Academic Press.

El Teorema de Pitágoras: una idea para su construcción dinámica usando un software de geometría



MG. Julián Humberto **Santos Torres**

Profesor del área de Matemáticas
del Gimnasio de los Cerros

Propuesta dirigida a docentes de primaria interesados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas usando el Software de Geometría Dinámica.

He decidido realizar un proyecto de resolución de problemas enfocado en construcciones geométricas haciendo uso de tecnologías en el aula—particularmente del Software de Geometría Dinámica—motivado por las facilidades que presenta el software geométrico para la construcción a partir del arrastre, la modelación y el diseño de figuras. En este informe se presentará una propuesta que surgió en este proyecto para la construcción del objeto geométrico Teorema de Pitágoras, en la que se utiliza el software con el fin de identificar los aspectos técnicos y didácticos que contribuyen a un mejor aprendizaje. Me baso en la Teoría de Situaciones Didácticas, pues considero que permite identificar claramente el papel de los instrumentos tecnológicos en el aprendizaje de los estudiantes, describe de manera precisa el rol del profesor y predice el efecto que tendrán las actividades en el aprendizaje, además de permitir interpretar el software como medio para la construcción matemática.

Palabras clave: Geometría Dinámica Experimental, Teoría de Situaciones Didácticas, Teorema de Pitágoras, Software de Geometría Dinámica.

Presentación

El trabajo en el aula que he realizado haciendo uso de las tecnologías informáticas me ha demostrado que contar con el recurso tecnológico no garantiza un mejor aprendizaje. Desde entonces me he preguntado qué hace falta en estas tecnologías para que contribuyan al aprendizaje (Santos, 2016). Muchos de los reportes de innovación que dan cuenta de la utilización de las tecnologías informáticas en el aula, presentan los beneficios y dificultades del uso del software (Mariotti, (2002); Acosta, (2005); Marrades et al (2000); Acosta (2011)), y algunos de ellos declaran que las mayores dificultades son un desequilibrio entre el punto de vista matemático y el punto de vista didáctico, además de la carencia de una orientación teórica clara que posibilite analizar lo sucedido.

He desarrollado un proyecto enfocado en construcciones geométricas, utilizando la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2011) como una guía teórica para analizar los procesos de enseñanza-aprendizaje con tecnología. Esta teoría permite interpretar el Software de Geometría Dinámica como un medio material con el cual el estudiante interactúa y experimenta para resolver problemas, produciendo un aprendizaje por adaptación (Acosta, 2005). Este enfoque teórico permite describir de manera precisa el rol del profesor y el estudiante, a partir del análisis de los tres procesos planteados por la teoría: la validación, la devolución y la institucionalización (Margolinas, 2008).

En este proyecto los estudiantes deben resolver en parejas una serie de problemas de construcción haciendo uso de un software de geometría dinámica (se ha usado el software Geogebra) que descargan en su smartphone. Los problemas de construcción usando el software de geometría dinámica requieren que los estudiantes comprendan que deben realizar construcciones dinámicas, no estáticas, y que estas responden a propiedades geométricas. Por ejemplo, si deseo construir un triángulo rectángulo usando el software, este debe responder siempre a la propiedad de ser una figura de tres lados y tres ángulos, donde uno de estos ángulos es recto; sin importar cuánto arrastre alguno de los elementos que componen la figura, esta debe mantener sus propiedades. A continuación se presenta uno de los problemas planteados a los estudiantes y las situaciones que se presentaron en su desarrollo.

Desarrollo

El objeto matemático que se desea construir es el Teorema de Pitágoras, ampliamente usado en la solución de problemas en los que se busca descubrir la distancia entre dos puntos y que suele proponerse como conocimiento matemático para grados superiores. Por citar un ejemplo, dentro de los estándares básicos de competencias en matemáticas se propone como una competencia para estudiantes de grado octavo y noveno la siguiente: ¨Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostraciones de teoremas básicos, teorema de Pitágoras¨ (MEN, 2006, p.86). Este artículo pretende dejar a consideración de sus lectores si una propuesta como esta permitiría pensar en la construcción de este objeto geométrico en grados primarios.

El problema propuesto a los estudiantes fue el siguiente:

1. Construya un triángulo cualquiera ABC (ver figura 1).
2. Construya los cuadrados de cada uno de los lados del triángulo (ver figura 2).[1]
3. Una vez construidos los cuadrados de los lados del triángulo (ver figura 3), use la herramienta de área y mida el área de los cuadrados (ver figura 4). Use el arrastre hasta lograr que la suma de dos áreas de los cuadrados sea igual al área del cuadrado restante (ver figura 5).

1 Aunque los estudiantes previamente habían trabajado en la construcción de un cuadrado a partir de dos rectas perpendiculares que pasen por los extremos de un segmento, y los círculos de radios de igual longitud a la del segmento, el profesor podría pedirle a los estudiantes que usen la herramienta de polígono regular o haber creado esta modelación previamente para ellos.

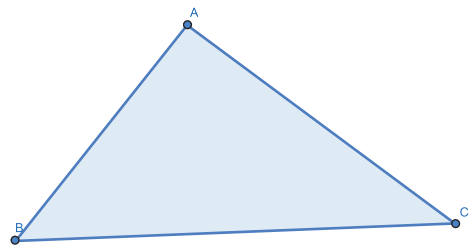
Los estudiantes lograron hacer la construcción y usar la herramienta para medir las áreas de los cuadrados. Fue necesario plantear como opción el redondeo de las cifras decimales, asumiendo que funcionaría la construcción cuya suma de áreas estuviera muy cercana al área restante.

Terminada la construcción el profesor platea la siguiente pregunta: ¿Qué tipo de triángulo se debe formar para que se cumpla esta relación entre las áreas de los cuadrados? Algunos estudiantes proponen que este triángulo es escaleno, y el profesor les solicita probar con otros triángulos escalenos y verificar si se cumple la relación; los estudiantes manifiestan que no se cumple la relación, invalidando y modificando su conjetura. A este proceso la teoría lo denomina validación: el estudiante, luego de la interpretación de las retroacciones del Software, decide si su acción alcanza lo que quería; es allí cuando está en la capacidad de validar o invalidar una acción y resolver por su propia cuenta un problema. Cada intención que el estudiante tiene para resolver una tarea trae consigo una acción; si la retroacción del Software no alcanza lo que él quería, el estudiante invalida la acción (Santos, 2016).

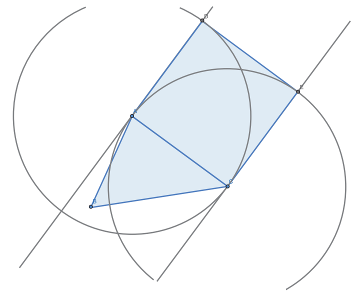
Tras la invalidación adecuada de esta y otras conjeturas, los estudiantes proponen que el triángulo que se forma es al parecer un triángulo rectángulo, y el profesor les solicita probar con otros triángulos rectángulos usando el arrastre; todas las acciones del profesor durante el desarrollo del problema—cómo acompaña el proceso de validación de sus estudiantes y cómo interviene para que el estudiante tenga un aprendizaje por adaptación—se describen en la teoría como procesos de devolución. Las intervenciones del profesor deben reforzar el proceso de validación del estudiante pero nunca interrumpir la interacción del alumno con el medio y, por lo tanto, tampoco con el proceso de validación.

Los estudiantes reconocen que siempre que se forma un triángulo rectángulo parece mantenerse la relación y validan su conjetura asegurando que si se forma un triángulo

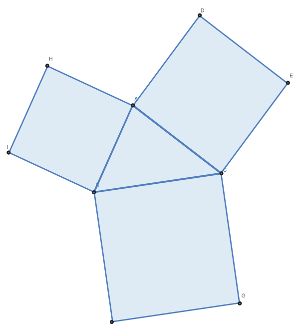
◆ **Figura 1. Construcción de un triángulo cualquiera ABC.**



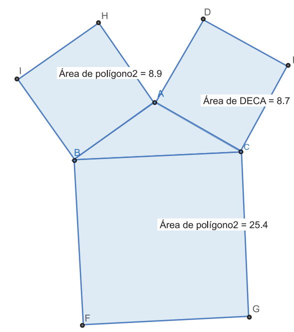
◆ **Figura 2. Construcción de un cuadrado ACED de uno de los lados del triángulo cualquiera ABC.**



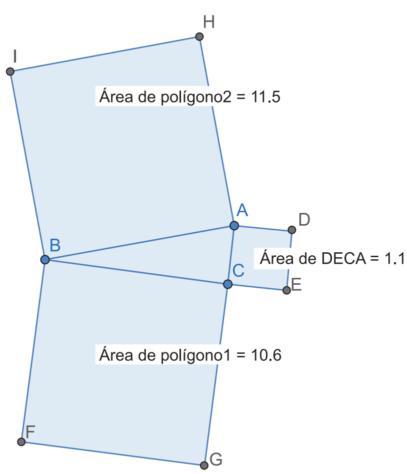
◆ **Figura 3. Construcción de los cuadrados de cada uno de los lados del triángulo cualquiera ABC.**



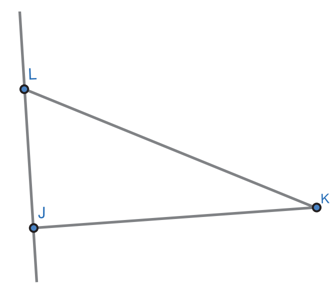
◆ **Figura 4. Las suma de las áreas de dos de los cuadrados no es igual al área del cuadrado restante.**



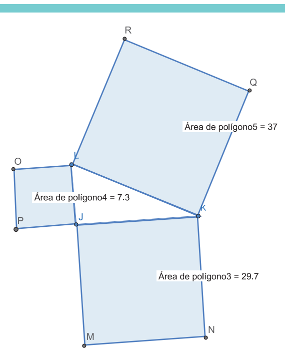
◆ **Figura 5. ¡parece funcionar! la suma de las áreas de dos de los cuadrados parece ser igual al área del cuadrado restante.**



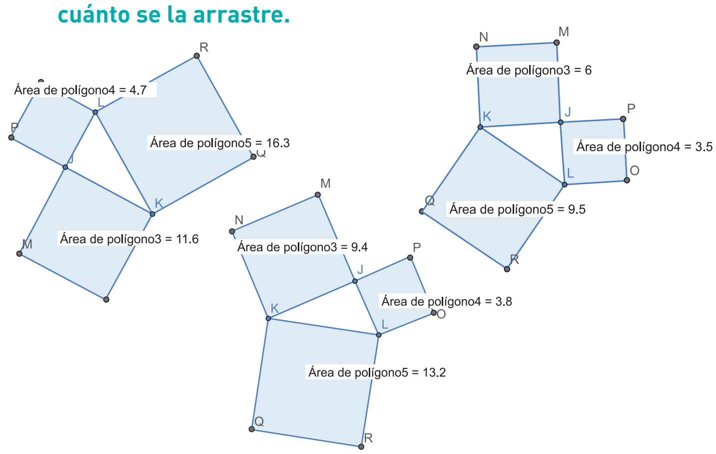
◆ **Figura 6. Construcción de triángulo rectángulo usando la herramienta perpendicular.**



◆ **Figura 7. ¡Eureka! La suma de las áreas de dos de los cuadrados siempre es igual a la otra área.**



◆ **Figura 8. La relación se mantiene sin importar cuánto se la arrastre.**



rectángulo, la suma de dos de las áreas es igual a la otra. Tras una puesta en común de lo discutido[2], el profesor solicita a los estudiantes elaborar una construcción exacta de la situación donde siempre, sin importar el arrastre, se mantenga esta relación.

Los estudiantes comprenden que para realizar esta construcción exacta, deberían empezar por construir el triángulo que ellos creen permite que la relación se mantenga (ver ilustración 6)[3]. Una vez hecho el triángulo rectángulo, construyen los cuadrados que se forman en cada uno de sus lados y, por último, usan la herramienta área para medir el área de los cuadrados (ver figura 7).

El profesor les pide arrastrar los puntos sobre la construcción y verificar que la relación siempre se mantiene (ver figura 8).

Una vez terminada la construcción, el profesor solicita a los estudiantes definir con sus propias palabras esta relación. Algunas de sus respuestas podrían generalizarse en lo que parece ser una definición: "Si tienes un triángulo rectángulo, construyes los cuadrados de sus lados y luego mides el área de estos últimos, la suma de las áreas de dos de los cuadrados es igual al área del cuadrado restante", definición que no tiene nada que envidiarle a la definición clásica del Teorema de Pitágoras.

Ahora, el profesor debe lograr relacionar estos conocimientos construidos a partir de la experimentación y de la elaboración de conjeturas con el saber dentro del proceso que la teoría denomina institucionalización. La institucionalización es el proceso de construcción colectiva del saber a partir de los conocimientos personales de los estudiantes. Por lo tanto el proceso de institucionalización implica una colaboración entre profesor y estudiantes (Santos, 2016).

2 Espacio de discusión conjunta donde los estudiantes discuten sus conjeturas frente al grupo.

3 Los estudiantes han trabajado previamente en la construcción de un triángulo rectángulo a partir de la herramienta perpendicular.

Entonces, el profesor construye una definición conjunta con los estudiantes de esta relación, y empieza por enunciar que, en un triángulo rectángulo, al lado opuesto del ángulo recto se le conoce con el nombre de hipotenusa, mientras que a los otros dos lados se les conoce con el nombre de catetos, y les pide a los estudiantes añadir a su definición el nombre especial que tiene cada uno de esos lados. De esta manera los estudiantes reescriben su definición de la siguiente forma: "Si tienes un triángulo rectángulo, construyes los cuadrados de sus lados y luego mides el área de estos últimos, la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa, reconociendo que el cuadrado más grande parece estar siempre sobre la hipotenusa".

Por último, el profesor comparte con los estudiantes la definición clásica del teorema: "En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos", definición ya muy bien construida por los estudiantes.

Conclusión

En conclusión, **este tipo de construcciones demuestra que el Software de Geometría Dinámica permite al estudiante elaborar conjeturas y experimentar para probarlas, esto es, deja de ser sólo una herramienta que permite hacer dibujos y se convierte en un medio que permite hacer construcciones geométricas y proponer otro tipo de demostraciones matemáticas.**

Aunque son numerosos los beneficios que el Software de Geometría Dinámica tiene en el proceso de construir conjeturas y experimentar para probarlas, la falta de un sustento teórico que fundamente la práctica de hacer matemática usando la tecnología, impide que sus potencialidades sean observables y la relegan en el ámbito educativo a ser un instrumento más en la enseñanza de las matemáticas. Se espera que este artículo permita tomar una postura crítica sobre la necesidad de hacer uso de las nuevas tecnologías informáticas en la formación de estudiantes.

Por último, privilegiar la planeación de una intervención antes de su ejecución, la construcción de un saber colectivo, la consideración de los conocimientos propios de cada estudiante, el control de las situaciones que pueden presentarse en el aula de clase, la validación propia y colectiva de acciones por encima de la imposición del saber, son tan solo algunas de las tantas situaciones que se deben privilegiar en los espacios donde se construya conocimiento matemático. **La práctica no debe estar desconectada de la teoría: no podemos enseñar tan solo con lo que creemos cierto, válido o eficiente; es necesario consolidar una práctica científica de la construcción del saber matemático.**

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, G. (2005). *Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática.* Educación Matemática, 17(3), 121-140.

Acosta, M., Mejía, C., & Rodríguez, C. (2011). *Lugares geométricos en la solución de un problema de construcción: presentación de una posible técnica de una praxeología de geometría dinámica*. Educación Matemática, 25(2), 141-160.

Brousseau, G. (2011). *Théorie des situations didactiques. Grenoble, la pensé e sauvage*.

Mariotti, M. A. (2002). *Justifying and proving in the Cabri environment. International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 6(3), 257-281.

Margolinas, C. (2008). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas.* Bucaramanga: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). *Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment*. Educational studies in mathematics, 44(1-2), 87-125.

MEN, M. D. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Recuperado de: http://www. mineducacion. gov. co/1621/articles-340021_ recurso_.

Santos, J. (2016). *Una implementación para la construcción del objeto geométrico parábola, a partir del trabajo con el Software de Geometría Dinámica CaRMetal* (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

3 Encuentro Matemáticas Marymount Preescolar - Primaria

COLEGIO LOS NOGALES

Pixabay.com. (2018). Recuperado de https://bit.ly/2OKzpbJ

Los Centros de Aprendizaje se consideran como una estrategia didáctica que favorece la enseñanza de las matemáticas en niños de edad preescolar. Por medio de estos centros, los estudiantes se benefician en el desarrollo de su autonomía, aclaración de conceptos, resolución de problemas permanentes, trabajo cooperativo, formulación de preguntas y desarrollo del pensamiento crítico analítico, entre otros. Las ventajas para los docentes son: seguimiento cercano y preciso detectando dificultades y fortalezas en sus alumnos, reconocer a tiempo los aspectos didácticos por mejorar para apoyar los procesos de pensamiento en los niños y hacer ajustes en planeaciones. Los docentes recurren a las observaciones realizadas en los centros y luego las comparten y reflexionan en las reuniones de planeación para realizar los ajustes pertinentes en el currículo en espiral que se maneja en la institución.

Palabras clave
Centros de Aprendizaje, pedagogía activa, seguimiento cercano al estudiante, metacognición.

Niños protagonistas de su propio aprendizaje

Catalina **Montenegro**
Diana **Mejía**
Mónica **Jaramillo**
Profesoras del área de Matemáticas del Colegio Los Nogales

Los niños en edad preescolar se caracterizan por su creatividad, curiosidad, ganas de aprender, inquietud hacia el conocimiento, espontaneidad y motivación por las matemáticas. Es en esta etapa escolar donde el docente debe aprovechar esta disposición natural que los estudiantes presentan para poder desarrollar su pensamiento matemático de una forma activa y desafiante en un contexto rico que los lleve a estimular su habilidad cognitiva.

El currículo del Colegio Los Nogales está planteado desde una perspectiva constructivista, que parte de los conocimientos y habilidades previos de los estudiantes para, a partir de ellos, lograr cada vez niveles más sofisticados de aprendizaje. Para lograrlo, el enfoque pedagógico se inspira en el marco de la Enseñanza para la Comprensión (EpC). De acuerdo con este marco, en cada área se asume la comprensión del objeto de conocimiento como construcción, en términos de proceso (fases de aprendizaje) más que de resultados. Cada una de las áreas académicas busca desarrollar habilidades y comprensiones que se constituyan en herramientas esenciales que les permitan a los estudiantes desempeñarse exitosamente en las demás áreas de conocimiento, a la vez que interactuar con el mundo y valorarlo desde una perspectiva reflexiva y crítica.

Una de las mayores fortalezas que puede destacarse de la propuesta de la EpC es su dimensión práctica que recoge importantes descubrimientos sobre la naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje y los proyecta en un marco conceptual integrador de diversas estrategias que, a su vez, actúa como principio metodológico para la enseñanza. Así, por ejemplo, la importancia del aprendizaje cooperativo, el valor epistemológico de la pregunta, la exhibición o puesta en escena de los logros alcanzados por el estudiante, las actividades prácticas para el aprendizaje, la interdisciplinariedad, la incorporación de los principios de las inteligencias múltiples, el trabajo por portafolios y por proyectos, el uso de los centros de aprendizaje, el manejo creativo de los libros de texto y la aplicación de habilidades de pensamiento, son todas estrategias de enseñanza y aprendizaje desarrolladas en distintos ámbitos que la EpC incorpora o a las que remite en cada uno de los componentes de su marco conceptual.

Aunque el grueso de los docentes conciba que toda enseñanza es para la comprensión, son pocos los que se preguntan en qué consiste específicamente, y aún hay quienes la asocian con la capacidad de reproducir las informaciones que se transmiten en el aula de clase, con «saber».

La enseñanza para la comprensión es una enseñanza para la «puesta en escena» que, sin embargo, no se limita a la repetición mecánica—a la manera del aprendiz de oficios—sino que sugiere cambios, proyecciones y nuevas aplicaciones cada vez distintas del conocimiento. Es por lo tanto una enseñanza que potencia la creatividad, que apela a la fuerza transformadora de la inteligencia. Esta quizá sea una importante diferencia que deba establecerse entre el concepto de comprensión que nutre la teoría de la EpC y otras definiciones o conceptos parecidos con los que guarda distancias críticas importantes. El educador que asume la EpC como principio didáctico y estrategia metodológica debe, por tanto, asumir una actitud abierta para evaluar los desempeños de sus estudiantes y valorarlos en consecuencia con los criterios de flexibilidad, creatividad e innovación que son inherentes al concepto mismo de desempeño que sustenta la metodología EpC y, sobre todo, «reconocer que existen diversas posibilidades de interpretación, aplicación, invención y revisión de los sistemas simbólicos o de representación del mundo y que estas posibilidades pueden ser potenciadas por el docente si reconoce que sus prácticas y las de sus alumnos son fundamentalmente actos discursivos del entorno que suscitan nuevas formas de comprensión desde las cuales es posible la modificación de las formas anteriores de representación.» (Baquero, 1999). Sin esta «actitud» frente al conocimiento que lo convierte en «objeto de comprensión» de sus alumnos, la metodología se vacía y pierde todo su potencial para posibilitar desempeños nuevos.

Ahora, con respecto a las matemáticas la visión del Colegio Los Nogales se basa en cuatro ideas básicas:

- Las Matemáticas como disciplina que conecta todos los conceptos de la vida humana.
- Las Matemáticas como un medio para comunicarnos.
- Las Matemáticas como una herramienta para resolver problemas.
- Las Matemáticas como una materia que todos nuestros estudiantes puedan entender y aplicar en su vida diaria.

A los estudiantes de preescolar se les brinda la oportunidad de explorar y analizar conceptos matemáticos a través de diversos e interesantes problemas de la vida real. Ellos pueden mostrar su comprensión por medio del uso de material concreto, modelos, dibujos, gráficas, entre otros; con experiencias dentro y fuera del aula, todo esto articulado en una didáctica activa de enseñanza denominada Centros de aprendizaje (ligados con la EpC), entendidos como un conjunto teórico que nutre al constructivismo. Este tiene sus orígenes desde los planteamientos teóricos propuestos por Piaget, seguidos por Vygotsky y retomados por Ausubel y Bruner, quienes coinciden en denominar al alumno como el protagonista del aprendizaje, es decir, al estudiante como principal actor de la acción educativa, pues es quien vive su propio proceso formativo de manera individualizada y única. Según Decroly, "el método de enseñanza (que fue ideado por Ovide Decroly) tiene como base el descubrimiento de los intereses y necesidades de los niños. **Esto hará que los niños y niñas sean protagonistas de su propio aprendizaje** teniendo una motivación desde el primer momento, ya que podrán fomentar su aprendizaje con conceptos que les atraerán. Al sentir motivación tendrán más atención y serán los niños lo que sean capaces de buscar el conocimiento, potenciando así el aprendizaje" (Etapa Infantil, s.f.). **Decroly estaba convencido de que hay que añadir pedagogías innovadoras en los programas y métodos educativos** para que de este modo se pueda avanzar en la enseñanza y conseguir buenos resultados académicos. Los niños deben ser los protagonistas de su aprendizaje y no perder la motivación.

Siguiendo este orden de ideas, en el Colegio Los Nogales una de las didácticas de enseñanza en el pre escolar son los Centros de Aprendizaje, que se consideran como una estrategia dinámica que favorece el aprendizaje de las matemáticas. Por medio de estos centros, los estudiantes se benefician en el desarrollo de su autonomía, aclaración de conceptos, resolución de problemas permanentes, trabajo cooperativo, formulación de preguntas y construcción del pensamiento crítico analítico, entre otros. Para planear los centros se debe tener en cuenta el tema o tópico a estudiar, las habilidades que se quieren potenciar y, sobre todo, planear con cierta precisión las actividades para cada centro que, de una u otra forma, están relacionadas con el tema general. Estas deben responder a un propósito claro y pedagógico que tenga en cuenta el nivel de desarrollo (cronológico y mental) de los alumnos, sus roles, el currículo de la unidad, las necesidades de los alumnos y el objetivo a alcanzar. El rol del docente pasa de ser el del 'dueño' del saber, al de "mediador y facilitador del aprendizaje." Esto implica un cambio en la dinámica del aula desde la disposición del mobiliario (mesas, pupitres, sillas) hasta la interacción que se da en clase. El profesor tiene a cargo un centro de actividades donde puede profundizar, aclarar, preguntar y observar de forma cercana el desempeño de cada uno de sus estudiantes, mientras que el resto de los alumnos están en otros centros ejercitando diferentes habilidades matemáticas.

Por otro lado, los estudiantes en los centros de aprendizaje son autónomos y activos, están en movimiento (corporal y cognitivo) permanente, asumiendo los retos propuestos en cada centro, mostrando un liderazgo con sus compañeros en el desarrollo de las tareas, empoderándolos en su propio proceso de aprender. Los alumnos se vuelven más conscientes de sus fortalezas y áreas en las cuales deben profundizar.

Esta didáctica permite hacer un seguimiento cercano y preciso que ayuda a detectar dificultades y fortalezas en los alumnos, además de evidenciar a tiempo los aspectos didácticos por mejorar para apoyar los procesos de pensamiento en los niños y hacer ajustes en planeaciones. Los docentes recurren a las observaciones realizadas en los centros y luego las comparten y reflexionan sobre ellas en las reuniones de planeación para hacer los ajustes pertinentes en el currículo en espiral que se maneja en la institución.

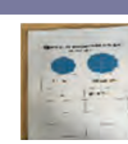
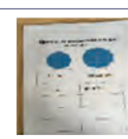
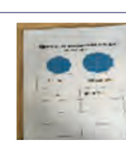
Es importante destacar que el uso de estos centros permite al maestro realizar una evaluación continua con los estudiantes y, a la vez, favorece la autoevaluación de los mismos niños ya que optimiza el desarrollo del proceso meta cognitivo en el que los alumnos son los protagonistas de su aprendizaje al reflexionar sobre su propia comprensión.

Para finalizar, a continuación se presenta un ejemplo de centros empleados en el nivel de pre jardín y otro en el nivel de jardín basados en la Enseñanza para la Comprensión.

Estructura de clase

- Agenda
- Propósito
- Rutinas:
  - Matemáticas
  - Pensamiento:
  - Ver - Pensar - Preguntar
- Practica
- Cierre - ¿qué aprendiste?

Rotación por grupos

Conejos	Mariposas	Gallinas
	De fichas 	
		
		

Ejemplo de la Metodología por Centros de Aprendizaje

Nivel: Prejardín (niños de 4 a 5 años).

Tema: Número y noción de cantidad.

Habilidades por desarrollar: Conteo del 0-10, representación de cantidad, secuencia numérica de forma ascendente y descendente.

Metodología de trabajo: Los niños serán organizados por grupos de 5 a 6 (o más, dependiendo del número de asistentes). Se tendrán 3 centros que desarrollarán las habilidades enunciadas. Al inicio de clase el profesor explica en qué consiste cada centro y lo que se espera que los alumnos hagan con el material brindado. El profesor modela las acciones a seguir en cada centro explicando el proceso y anticipando el resultado esperado. En cada centro está asignado el rol del niño(a) que se encarga de distribuir los materiales. En el tablero se les dibujará una tabla que represente gráficamente la secuencia a seguir de las actividades de cada centro y el tiempo destinado a cada uno.

Los centros son organizados de la siguiente manera:

Conteo del 0 al 10: Los alumnos tendrán semillas o fichas. Los niños reciben láminas con los números del 0 al 10 y empiezan a organizar las semillas o fichas en cada una de acuerdo con el número que tengan.

Representación de cantidad: Los niños encuentran material agrupado de a 7, 4, 2 0, 9 y deben contarlo y anotar en sus tableros personales el número que contaron siguiendo el trazo adecuado del número.

Secuencia numérica ascendente y descendente: Hay fichas con números escritos y hay material concreto donde ellos deben organizarlo de forma ascendente y descendente, en algunas ocasiones se puede tener un modelo como 2, 3, ___, ____ 6, 7. Deben seguir las secuencias y, de la misma forma, contar de mayor a menor.

Tiempo en cada centro: 15 minutos.

Al escuchar la música, rotan y se dirigen al centro de acuerdo con el orden de rotación explicado antes. El profesor está sentado en un centro dirigiendo la actividad durante toda la clase y de esta forma cada grupo pasa por el profesor, quien puede observar de cerca a cada uno.

Nivel: Jardín (niños de 5 a 6 años)

Tema: Matemáticas

Habilidades por desarrollar: Identificación y trazo de los números del 1 al 100, conteo de números de cinco en cinco y de diez en diez. Dictado de números del 1 al 100.

Metodología de trabajo: Los niños serán organizados por grupos de 5 a 6 (o más, dependiendo del número de asistentes). Se tendrán 3 centros que desarrollarán las habilidades enunciadas. Al inicio de clase, el profesor explica en que consiste cada centro y lo que se espera que los alumnos hagan con el material brindado. El profesor modela las acciones a seguir en cada centro explicando el proceso y anticipando el resultado esperado. En cada centro está asignado el rol del niño(a) que se encarga de distribuir los materiales. En el tablero se les dibujará una tabla que represente gráficamente la secuencia a seguir de las actividades de cada centro y el tiempo destinado a cada uno.

Los centros son organizados de la siguiente manera:

Identificación del 1 al 100: Juego de parejas. Los niños encontrarán cartas con números boca abajo para que, por turnos, busquen las parejas numéricas iguales. Cada vez que ven una carta, dicen el número en voz alta. Cuando no se saca el número igual, se cede el turno al siguiente niño.

Conteo de cinco en cinco y de diez en diez: Los niños contarán de cinco en cinco, de forma oral, utilizando material concreto (manos de papel). Jugarán el juego de palmas por parejas, cantando la canción previamente enseñada del conteo del diez en diez. Este centro estará ubicado afuera del salón.

Dictado numérico de números del 1 al 100: Esta mesa está acompañada por el profesor, quien entregará una hoja cuadriculada y lápices a los 6 niños. Les dictará los siguientes números: 6, 9, 11, 13, 17, 20, 28, 30, 39, 44, 48, 50, 56, 59, 60, 66, 67, 71, 77, 73, 80, 87, 90, 91, 94. 97, 99 y 100. Al finalizar, el profesor le pedirá a cada niño que lea los números dictados. Este centro será evaluado por el docente detectando las fortalezas y debilidades en forma individual. Cada niño se autoevaluará, corrigiendo los números que estén equivocados.

Tiempo en cada centro: 15 minutos.

Al escuchar la música, rotan y se dirigen al centro de acuerdo con el orden de rotación explicado antes. El profesor está sentado en un centro dirigiendo la actividad durante toda la clase y de esta forma cada grupo pasa por el profesor, quien puede observar de cerca a cada uno.

En cursos superiores se puede incluir la tecnología en un centro, los tangram, los rompecabezas y actividades que desarrollen habilidades motrices y cognitivas relacionadas con el desarrollo del pensamiento y lenguaje matemáticos.

REFERENCIAS

Baquero, P. (1999). *Docencia, lenguaje y comunicación*. Módulo de Comunicación. Especialización en Docencia Universitaria Universidad Santo Tomás Bogotá.

Etapa Infantil. (s.f.). Qué es el método Decroly. Disponible en: https://www.etapainfantil.com/metodo-decroly#

Gardner, H. (1987) *Estructuras de la mente: La teoría de las inteligencias múltiples*. Bogotá: CFC.

Hattie, J. (2012). *Visible learning for teachers. Maximizing impact on learning. N.Y:* Routledge.

Perkins, D. (1994). *Poner la educación en primer plano*. Educational Leadership.

Sousa, David A. (2011). *How the brain learns.* Corwin. Recuperado de: https://www.etapainfantil.com/metodo-decroly.

Damaris **Olarte Beltrán**
Eliana Mabel **Solano Rangel**

Profesoras del área de Matemáticas del Gimnasio Los Portales

Un mundo fragmentad

Como docentes nos enfrentamos diariamente al reto de acompañar a nuestros estudiantes pensando siempre en la diversidad y en cómo perciben el conocimiento durante su proceso de aprendizaje. Es por esto que, a través de esta experiencia de clase, nuestro objetivo es plantear estrategias para potenciar las habilidades de nuestros niños en un ambiente que también sea un tercer maestro.

Esta experiencia de aprendizaje se encamina hacia la construcción de conocimiento entre pares, al igual que busca que el aprendizaje se dé en un contexto apropiado en el cual se establezcan redes de apoyo entre todos los actores de la comunidad escolar, facilitando así la planeación de un currículo que piense cómo fortalecer las habilidades de todos los estudiantes y eliminar así las barreras que interfieren en el aprendizaje.

Con esta experiencia de aprendizaje queremos construir herramientas diversas para el diseño de los planeadores de clase, que nos permitieran abordar los estilos de aprendizaje que se observan en el aula y brindar opciones múltiples para obtener información y expresar lo aprendido.

Palabras clave: inclusión, aprendizaje cooperativo, fracciones.

(Bogotá. 2017). Archivo Gimnasio Los Portales. Bogotá, Colombia.

En las últimas dos décadas, hemos experimentado un cambio en la construcción social del conocimiento. Poco a poco hemos visto cómo los modelos educativos han comenzado a resaltar la necesidad de entendernos como pares, reconociendo la individualidad y la forma en que aprendemos.

De aquí parte la idea de diseñar una experiencia de aprendizaje que no solo favorezca el conocimiento en el área de matemáticas, sino que también permita trabajar en una atmósfera de aprendizaje que dé respuesta a las diversas formas de pensar y acercarse al mismo.

Como colegio IB (Bachillerato Internacional), en el Gimnasio Los Portales tenemos un programa de inclusión que procura crear y orientar entornos de aprendizaje óptimos donde se acepte y se celebre la diversidad de todos los alumnos. Para nosotros, la inclusión es "un proceso continuado cuyo objetivo es aumentar el acceso de todos los alumnos y su participación en el aprendizaje mediante la identificación y eliminación de barreras." (IB, 2016).

Actualmente, en grado quinto tenemos dos estudiantes que hacen parte de este programa: una estudiante con Síndrome de Down y otra con Síndrome de Cornelia de Lange. Ninguna de las dos estudiantes comparte el mismo código lingüístico ya que, como colegio bilingüe, impartimos la clase de matemáticas en inglés, y ambas estudiantes tienen una adaptación de logros debido a que sus capacidades cognitivas, intelectuales y su desarrollo psicomotor no corresponden a los de sus compañeras. Al momento de dar las instrucciones, estas se dan en inglés y, paso seguido, la profesora hace la explicación uno a uno con ellas en español, con el fin de que puedan ser parte de las actividades y puedan compartir sus ideas y conocimientos.

Para lograr esto, la actividad se llevó a cabo dentro de la metodología del aprendizaje cooperativo, donde los grupos fueron organizados previamente de forma heterogénea, privilegiando los diferentes estilos y formas de aprendizaje. En el colegio fomentamos la importancia del apoyo entre pares para lograr la construcción de conocimiento y el desarrollo de las habilidades sociales, viendo el trabajo cooperativo como una manera de fomentar valores tales como la empatía, el respeto, la responsabilidad y la identidad de grupo.

De la misma manera, dentro de nuestro proceso de planeación colaborativa nos basamos en los pasos del ciclo de indagación institucional como en las pautas del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), siendo este un enfoque que busca asegurar que todos los estudiantes puedan acceder a los contenidos y objetivos del currículo y un sistema de apoyo que favorece la eliminación de barreras a través de múltiples medios de representación, acción y expresión. Gracias a las pautas que nos ofrece el DUA, no solo aquellas estudiantes con obstáculos se ven beneficiadas, sino también aquellas estudiantes cuyo desempeño es superior, proporcionando espacios donde se enfrenten a diferentes retos que les permitan potencializar sus habilidades y al mismo tiempo beneficien al grupo con el cual están trabajando.

A partir de lo anterior, esta experiencia de aprendizaje estuvo dividida en 4 grandes momentos que les permitieron a las estudiantes identificar las fracciones como parte de la vida cotidiana, para así modelarlas, simplificarlas, convertirlas y compararlas, haciendo uso de material concreto y llevando este conocimiento a contextos cercanos.

Provocación y conexión – Formas de representación

Para comenzar, proyectamos una imagen de la obra del artista Omar Rayo, con la que esperábamos activar conocimiento previo y brindar opciones que promovieran la interpretación de los conceptos matemáticos trabajados durante el año, conectándolos de alguna manera con la imagen. El registro de la información se hizo a través de la rutina de pensamiento *Conectar, Extender y Desafiar* con el fin de entender su pensamiento y hacerlo visible en cada uno de los grupos. Para el caso de las niñas de inclusión, ellas expresaron sus ideas en español y sus compañeras se encargaron de hacer la traducción. Más adelante, el registro se compartió con toda la clase para reflexionar sobre la validez y pertinencia de dichos conceptos en relación con la imagen.

Paso seguido, con las estudiantes leímos un artículo publicado por *The City Paper* (2015), donde hacían referencia a la obra de Omar Rayo y su inspiración en las matemáticas. De esta manera, logramos conectar a las niñas con el tema y discutir alrededor de las matemáticas en contextos diferentes al salón de clase. Gracias a esta actividad, a las estudiantes les surgieron diversas preguntas e inquietudes, por lo cual después de finalizada la experiencia, se les invitó a visitar la biblioteca para indagar más sobre el tema.

Resolver y plantear problemas: Formas de expresión

Con el propósito de proporcionar múltiples medios para construir aprendizaje en torno al concepto de fracciones y de aumentar la capacidad para monitorear el proceso de las estudiantes por parte del docente, diseñamos 5 estaciones en las cuales ellas tuvieron la oportunidad de alcanzar el objetivo de esta experiencia. En cada estación se dispuso el material, la instrucción para completarla, el tiempo establecido para ejecutarla, un reto para aquellas estudiantes que tienen unas habilidades superiores y unas fichas bibliográficas para registrar el producto final de la actividad realizada, que se utilizaron al final de la clase para hacer el proceso de evaluación y reflexión. Finalizada la experiencia, todos los grupos rotaron por cada una de las estaciones.

Estaciones

Bloques de construcción

Por medio de material didáctico, en esta estación las estudiantes debían crear un diseño que tuviera las siguientes características: 1/2 amarillo y 1/4 verde. El propósito de la estación era observar cómo las estudiantes lograban ensamblar su diseño de forma creativa y siguiendo las instrucciones dadas. Durante nuestro acompañamiento pudimos observar que este ejercicio fue más sencillo para algunas estudiantes que para otras. Sin embargo, fue una oportunidad para reflexionar, intercambiar experiencias, debatir entre ellas y generar nuevo conocimiento y curiosidad, siendo un aprendizaje activo que les permitió tener una noción más exacta de las fracciones en el uso cotidiano.

Pixabay.com. (2018). Recuperado de https://bit.ly/2y9s5Nr

Tecnología

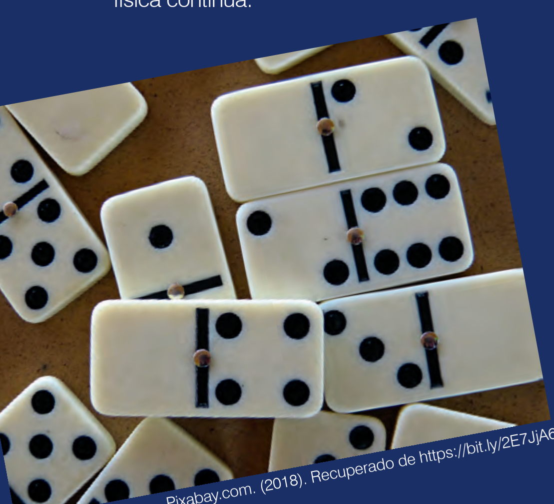
En esta estación las estudiantes utilizaron las IPADS para competir entre ellas haciendo uso de un juego en línea en el que debían simplificar las fracciones. En el caso de las niñas de inclusión, se utilizó un juego adaptado a sus necesidades, en el cual debían aparear las fracciones con las imágenes correspondientes. Este trabajo nos permitió evidenciar la importancia de generar experiencias en las cuales las estudiantes puedan tener una retroalimentación instantánea y acceso a herramientas que se ajusten a sus ritmos de aprendizaje. De igual forma, observamos que las estudiantes se esforzaron por superar retos y desafíos de acuerdo con sus niveles de desempeño y mostraron motivación.

El cubo

En esta estación las estudiantes recibían un cubo cuyas caras tenían instrucciones diferentes, entre ellas crear una rima relacionada con las fracciones, responder una pregunta sobre dónde se pueden encontrar fracciones, crear un problema con fracciones, demostrar fracciones equivalentes, definir qué es una fracción y convertir fracciones impropias a números mixtos. La instrucción inicial era resolver dos caras del cubo; sin embargo, hubo grupos que lograron resolver más caras de las requeridas en el tiempo establecido. Esta estrategia fomenta el pensamiento crítico, ya que las estudiantes deben describir, comparar, contrastar, asociar, analizar, aplicar y discutir ideas. Asimismo, permite hacer una lluvia de ideas más estructurada antes de que las estudiantes creen su producto final, siendo una estrategia muy efectiva para aquellos estudiantes que les gusta estar en actividad física continua.

Fracciones en las noticias

En esta estación las niñas debían leer un artículo acerca de cómo los adultos han olvidado algunos temas de matemáticas, ciencias y sociales que fueron aprendidos durante su primaria. A partir del texto, tenían que responder dos preguntas de comprensión de lectura y resolver un reto en el que debían convertir algunos porcentajes en decimales y en fracciones. Para el caso de las estudiantes que son parte del programa de inclusión, la lectura estaba traducida al español, utilizando un tamaño de letra más grande y con un contenido más corto. La lectura se desarrolló de forma individual, por lo cual fue una de las actividades que presentó mayor reto para las estudiantes. Sin embargo, esta estrategia favoreció la adquisición de conocimiento, proporcionando oportunidades para adquirir nuevo vocabulario y la posibilidad de evaluar su nivel de comprensión en el código escrito. Fue una actividad muy interesante para ellas y por este motivo la información presentada se convirtió en un aprendizaje significativo.



Pixabay.com. (2018). Recuperado de https://bit.ly/2E7JjA6

Efecto dominó

En esta estación las estudiantes debían escoger al azar algunas fichas de dominó y organizar las fracciones de mayor a menor, justificando su respuesta en las fichas bibliográficas. Durante esta actividad observamos que las estudiantes generaron un espacio para el debate con el fin de encontrar una solución al problema. En esta estación, las estudiantes optaron por convertir las fracciones en decimales y porcentajes, para así demostrar por qué decidieron disponer las fichas en el orden que lo hicieron. Este ejercicio fue apropiado para nosotras como docentes, ya que se adaptó a las necesidades de cada estudiante y dio lugar al contraste de ideas y al trabajo colectivo.

Evaluación – Formas de motivación

En el Gimnasio Los Portales, la evaluación es entendida como un proceso continuo dentro del ciclo de indagación que nos permite observar y guiar el proceso de cada una de las estudiantes, teniendo en cuenta sus necesidades e intereses. Sin embargo, considerando que nuestras estudiantes están familiarizadas con la estrategia del aprendizaje cooperativo, que promueve la autonomía y la responsabilidad individual y grupal, al finalizar la experiencia una estudiante por grupo fue elegida al azar para socializar su experiencia en una de las estaciones en las que participaron y mostrar el producto obtenido. En caso de que fuera escogida una estudiante de inclusión, se lleva a cabo lo mismo en su lengua materna. Durante esta etapa del ciclo de indagación, las estudiantes demostraron la adquisición de conocimiento conectado a las situaciones cotidianas y el desarrollo de diferentes habilidades de pensamiento, de comunicación y sociales.

> “Se vuelve necesario que repensemos y modifiquemos los principios y las estrategias que dominan la educación actual para posibilitar nuevos planteamientos didácticos”

Acción y reflexión

Para cerrar esta experiencia de aprendizaje y con el fin de verificar tanto el conocimiento adquirido por las estudiantes como el tipo de estrategia con la cual se sintieron más cómodas, se realizó una tarjeta de salida con tres preguntas: ¿Qué aprendí? ¿Cuál estación me gustó más y por qué? y ¿Qué aspecto encontré positivo en esta actividad? Al leer estas tarjetas, notamos que la experiencia fue entretenida para ellas y retó tanto sus habilidades matemáticas como su capacidad para construir en equipo. Para nosotras fue muy importante leer sus respuestas, porque nos permitió conocerlas aún más, entender la forma en que cada una de ellas aprende, y nos ayudó a recordar la importancia de diseñar diversas estrategias no solo para acercase al conocimiento, sino también para alcanzar las metas propuestas.

Pudimos observar que para algunas estudiantes ciertas actividades fueron más retadoras que para otras, pero finalmente todas alcanzaron el objetivo de la clase. En nuestro proceso de planeación colaborativa, también teníamos como objetivo acompañar a nuestras estudiantes en cada una de las estaciones, en especial aquellas que necesitaban una orientación más detallada, ya sea porque se presentaba alguna dificultad o porque su nivel de desempaño era más alto. Así pues, durante el recorrido por las estaciones tuvimos la oportunidad de trabajar con ellas uno a uno, conocer sus características e intervenir en el momento adecuado.

Otro factor relevante para lograr el objetivo de esta experiencia de aprendizaje y para que las estudiantes la aprovecharan al máximo fue la planeación previa, teniendo en cuenta la importancia de crear instrucciones claras, tener materiales interesantes y establecer unos tiempos de ejecución apropiados.

Terminada la actividad tuvimos la oportunidad de analizar como equipo y pensar en nuestras planeaciones a futuro, para que la gestión del aula siempre esté enfocada en los intereses y necesidades de nuestras estudiantes, con el fin de que conecten lo aprendido con su realidad inmediata y su aprendizaje sea significativo y perdurable.

(Bogotá. 2017). Archivo Gimnasio Los Portales. Bogotá, Colombia.

Es importante que, como docentes, trabajemos y nos concentremos en diseñar experiencias que busquen brindar una igualdad de oportunidades a todos los estudiantes, teniendo en cuenta que el docente está llamado a crear espacios de equidad, donde el salón se convierta en un tercer maestro donde el aprendizaje sea más efectivo.

La planeación y ejecución de esta actividad también nos permitió notar que nuestras estudiantes tuvieron la posibilidad de recordar lo aprendido y utilizarlo para resolver las situaciones planteadas. Por lo tanto, **se vuelve necesario que repensemos y modifiquemos los principios y las estrategias que dominan la educación actual para posibilitar nuevos planteamientos didácticos** y nuevas perspectivas de nuestra práctica, con el fin de integrar y acercar desde el conocimiento y desde la interacción a todos los alumnos.

La diversidad entonces exige modificaciones en las estrategias didácticas para transformar la acción educativa donde la heterogeneidad sea vista no como un problema, sino como una oportunidad para mejorar la calidad del proceso de enseñanza en una escuela donde todos tengamos un rol activo.

BIBLIOGRAFÍA

Gordon, D.T., Gravel, J.W., & Schifter, L.A. (2009). *A policy reader in universal design for learning* (pp.5-18) Cambridge, MA: Harvard Education Press

Tomlinson C.A. (1999). *The Differentiated Classroom*. Alexandria, VA.: ASCD.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1989). *Cooperative learning*. Edina, MN: Interaction Book Co.

Durante el proceso de aprendizaje de la suma teniendo en cuenta el valor posicional de cada dígito, planteamos actividades para cada una de las etapas del ciclo de indagación de nuestro colegio (*Engagement and connection, Exploring sources, Building and sharing knowledge, Posing and solving problems, Action and reflection* y *Assessment*). De este modo, las estudiantes se vieron envueltas en experiencias en las que interactuaron con el material didáctico para construir un aprendizaje concreto sobre el concepto de 'reagrupación', antes de pasar a la representación simbólica de la suma en columnas utilizando números.

Palabras clave
Ciclo de indagación, suma, reagrupación, valor posicional.

Indagación en Matemáticas durante la primera infancia

María Elvira **Castro Cuéllar**
Ana Melissa **Herrera Castillo**

Profesoras del área de Matemáticas del Gimnasio Los Portales


Pressfoto. www.freepik.es. (2018). Recuperado de https://bit.ly/2EDUL6l

Introducción

Como profesores del siglo XXI, estamos decididos a cambiar la idea de que las matemáticas son difíciles e incomprensibles. Hemos podido ver que este sentimiento aparece especialmente cuando los profesores enseñan el mecanismo para que los estudiantes se lo aprendan de memoria y, así, poder encontrar la "respuesta correcta". Además, consideramos necesario que los estudiantes tengan la posibilidad de interactuar y vivir experiencias reales sobre el uso y la aplicación de las matemáticas, pues esto resulta en un aprendizaje más significativo.

> El aprendizaje (...) requiere auto-regulación y la construcción de estructuras conceptuales a través de la reflexión y la abstracción. Los problemas no se resuelven al traer respuestas "correctas" aprendidas de memoria. ... El hecho de buscar y encontrar el camino hacia la meta proporciona mayor satisfacción que saber que uno ha encontrado la respuesta "correcta" (von Glasersfeld, 1995, p.9).

En el Gimnasio Los Portales, entendemos la indagación como un proceso en el que nuestras estudiantes tienen una voz activa. Teniendo en cuenta a varios autores, diseñamos nuestro propio ciclo de indagación para trabajar transdisciplinariamente con las estudiantes, asegurando que el proceso de aprendizaje esté liderado por ellas y siga los lineamientos de trabajo cooperativo establecidos en el PEI (que incluye el desarrollo de habilidades necesarias para realizar un trabajo colectivo). Durante este ciclo, las estudiantes están involucradas en el desarrollo, creación y modificación de las experiencias de aprendizaje; a través de estas, promovemos un pensamiento crítico y creativo que permite a las estudiantes preguntarse por el mundo que las rodea, encontrar respuestas a sus propias preguntas, conectar las experiencias de su vida diaria con aquellas vividas en el salón de clase y resaltar la importancia de compartir los espacios con otros de forma respetuosa (Ciclo de indagación GLP, 2017).

En Primero de Primaria, utilizamos también el ciclo de indagación en matemáticas para crear situaciones en las que las estudiantes se puedan acercar a los conceptos matemáticos antes de trabajar utilizando los símbolos (números, signos, etc.).

Ciclo de indagación

1. Engagement and Connection

Durante la etapa inicial, las estudiantes se ven inmersas en situaciones que les permiten hacer conexiones con sus conocimientos e ideas previas, además de suscitarles preguntas. Idealmente, las estudiantes se sienten atraídas por la idea de saber más acerca de una situación en particular, lo que las lleva a sentir la motivación necesaria para guiar la indagación que se desarrollará en las siguientes etapas del ciclo. En palabras de von Glasersfeld (1995), únicamente se puede motivar efectivamente a los estudiantes para continuar aprendiendo al guiarlos a experimentar el placer inherente a la resolución de un problema.

Con el fin de conocer los saberes previos que las estudiantes traían, propusimos una serie de actividades en las que ellas debían resolver sumas representándolas con material concreto (cubos). Entre los resultados que obtuvimos, las estudiantes demostraron reconocer los números del 1 al 100 y los símbolos de más (+) e igual (=).

Se les propuso a las estudiantes una situación en la que iban a ir de viaje a un lugar llamativo para ellas. Debían organizarse para salir; la única condición era que los buses en los que iban a salir tenían 10 sillas y no podían arrancar sin que las sillas estuvieran llenas. Las estudiantes se organizaron en grupos de 10, y aquellas que no alcanzaron a estar entre los grupos no pudieron asistir al viaje.

> “Consideramos necesario que los estudiantes tengan la posibilidad de interactuar y vivir experiencias reales sobre el uso y la aplicación de las matemáticas, pues esto resulta en un aprendizaje más significativo.”

2. Exploring Sources

En la segunda etapa del ciclo, las estudiantes van más allá de sus conocimientos previos y expanden sus conocimientos, experiencias y perspectivas. De esta manera, las estudiantes de Primero aprenden de sus propias experiencias además de buscar fuentes teóricas sobre los temas de interés de la unidad: “... Las estudiantes tienen tiempo para explorar objetos, eventos o situaciones. Como resultado de su compromiso mental y físico, establecen relaciones, observan patrones, identifican variables y cuestionan eventos.” (von Glasersfeld, 1995, p.9).

Para esta etapa del ciclo, las actividades planteadas estaban dirigidas a que las estudiantes utilizaran su contexto real para investigar fuentes que les permitieran conocer más sobre los números y sobre cómo estos se organizan. Por eso, se les plantearon preguntas relacionadas con dónde pueden ellas ver números y sumas en su vida y para qué pueden ser útiles. Además, leímos varios libros en *Reading A-Z*, una plataforma digital que utilizamos en el colegio. Uno de los libros llamado *Bears, ten by ten*, en el que unos osos se van de paseo en un tren y cada vagón se llena con grupos de diez osos, permitió que las estudiantes relacionaran la situación del libro con la primera actividad de la etapa de provocación y conexión. Adicionalmente, las estudiantes realizaron exploraciones para representar subjetivamente los números de dos dígitos utilizando material concreto.

3. Building and Sharing Knowledge

Para la tercera etapa del ciclo de indagación, las estudiantes replantean lo que han venido aprendiendo y comienzan a reconstruir sus conocimientos previos con los que van adquiriendo. Así, se convierte en un acto en el que los conceptos y habilidades se vuelven comprensibles y claros para ellas, pues logran hacer conexiones entre las dos etapas anteriores y las nuevas propuestas. Aquí, el profesor plantea diversas estrategias para enfrentar a las estudiantes a los nuevos conocimientos, tratando de que su intervención sea muy breve, o sólo se dé en momentos específicos de aclaración. Además, las estudiantes logran compartir ideas con sus compañeras, se apoyan mutuamente y muestran lo que van aprendiendo comparando diferentes perspectivas. Esta fase continúa el proceso en el que las estudiantes deben dar cuenta de aquellas experiencias que han ayudado a su proceso, además de aquellas que han presentado dificultades. (Bybee et al, 2006)

Como las estudiantes ya habían explorado e interactuado con los números del 1 al 100 y sabían representarlos de manera simbólica,

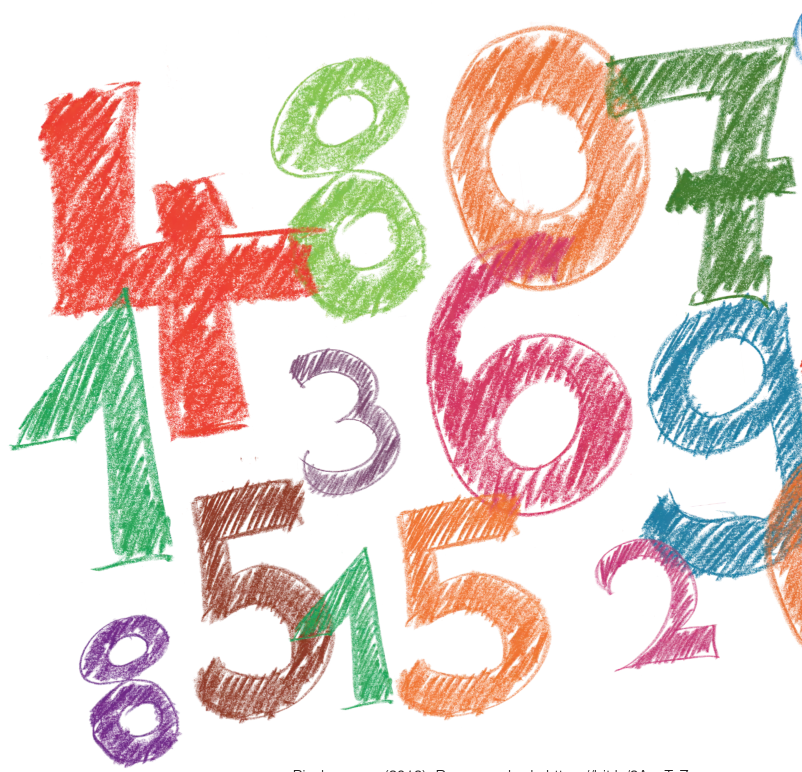
Pixabay.com (2018). Recuperado de https://bit.ly/2i7PyZl

les planteamos actividades en las que debían ubicar dígitos en la columna correspondiente para formar números de dos dígitos, teniendo en cuenta el valor posicional.

Luego, en sus grupos cooperativos, discutieron cómo representar unidades y decenas utilizando material didáctico, específicamente cubos. Poco a poco, fueron llegando a la conclusión de que era más fácil agrupar los cubos del mismo color (que forman una decena) y representarlos con una fila, y las unidades eran los cubos que quedaban sueltos.

Después de representarlos, debían llegar al proceso de suma. Para ello, se les planteó la pregunta de cómo podrían ellas sumar unos números dados. En grupos cooperativos, utilizaron los cubos y diferentes estrategias para llegar a un resultado. Ellas fueron descubriendo que, en algunos casos, al sumar los cubos sueltos podían completar otra decena y, así, la suma se volvía más sencilla de resolver. Entonces, sumaban las unidades sueltas primero y, si podían, completaban otra fila de 10 con los cubos, para finalmente sumar las decenas que tenían.

Una vez realizado todo el proceso utilizando material concreto, pasamos a representarlo utilizando símbolos y lenguaje matemático.



Pixabay.com (2018). Recuperado de https://bit.ly/2AqyTaZ

Pixabay.com (2018). Recuperado de https://bit.ly/2yu57kf

Al concluir esta fase, las estudiantes progresaron del proceso realizado con material concreto a la representación numérica de la suma, y entendieron como "reagrupación" el ejercicio de completar otra decena.

4. Posing and Solving Problems

La cuarta etapa del ciclo de indagación permite a las estudiantes aplicar los conocimientos construidos a situaciones nuevas. Las actividades de resolución de problemas proporcionan a las estudiantes más tiempo para continuar el proceso de aprendizaje. De acuerdo con Audrey Champagne (1987), las estudiantes presentan, defienden y discuten la información que han encontrado (lo cual es relevante para la resolución de la situación problema). Esta fase es, además, una oportunidad para involucrar a las estudiantes en nuevas situaciones y problemas que requieren de la transferencia de explicaciones similares o idénticas. La meta principal es la generalización de conceptos, procesos y habilidades.

Como parte de esta etapa del ciclo, a las estudiantes se les propusieron diferentes problemas en los que necesitaban sumar para dar una respuesta. Además, crearon sus propias historias de suma para que otras compañeras las resolvieran. Este proceso de creación se realizó en grupos cooperativos, lo que requirió que las estudiantes desarrollaran sus habilidades sociales y de comunicación, pues necesitaban escucharse, tener en cuenta las ideas de las demás y llegar a acuerdos para plantear el problema.

Con el fin de involucrar a las estudiantes en experiencias de pensamiento que van más allá de los ejercicios realizados, se les propusieron diferentes problemas de suma ya resueltos en los que ellas debían decidir si estaba bien el proceso o no, y justificar cuál era el error, de haberlo. Esto les permitió utilizar sus conocimientos conceptuales para implementar estrategias que les ayudaron a evaluar cada paso y volver sobre posibles nociones erróneas.

5. Action and Reflection

La etapa final del ciclo de indagación permite que los estudiantes reflexionen sobre lo aprendido, mostrando lo que saben, lo que más les gustó de la indagación y cómo pueden aplicar esto en contextos reales cercanos a su cotidianidad.

Las estudiantes reconocen cuánto han aprendido y qué necesitan reforzar, además de afianzar cuál es el verdadero valor de su aprendizaje al reconocer cómo las posiciona en el mundo y cómo los nuevos aprendizajes guían nuevas inquietudes y fomentan nuevas indagaciones.

"Las discusiones en grupo y el trabajo cooperativo garantizan que las estudiantes tengan oportunidades para aprender y compartir su comprensión del tema y reciban retroalimentación de aquellos que se encuentran en un nivel de comprensión similar."

Durante esta etapa del ciclo, las estudiantes demostraron lo que habían aprendido a través de diversas acciones. Una de ellas fue enseñarle a un profesor cómo se resuelve una suma, mostrándole el proceso paso a paso.

Otra fue decidir, en grupo cooperativo, cuáles son los pasos que se deben seguir para resolver una suma, teniendo en cuenta el proceso de reagrupación. Esta acción ayudó más a las estudiantes a las que se les dificultaba entender el proceso, pues para resolver las sumas siguen uno a uno los pasos y, si lo requieren, utilizan material concreto para guiarse. Otra acción que vimos fue que, durante unas olimpiadas matemáticas, al darles la instrucción a las estudiantes de justificar su respuesta, una niña resolvió la suma y escribió los pasos que siguió.

6. Assessment

Durante la valoración, las estudiantes tienen la oportunidad de reflexionar acerca de aquello que pudo haberse hecho de forma distinta. Esta etapa les permite a las estudiantes evaluar su proceso y el de sus compañeras, además de darnos como docentes una luz sobre cuáles momentos necesitan más tiempo de desarrollo. Es una constante evaluación de nuestras acciones, tanto de los profesores como de las alumnas, que garantiza un ciclo significativo.

Las discusiones en grupo y el trabajo cooperativo garantizan que las estudiantes tengan oportunidades para aprender y compartir su comprensión del tema y reciban retroalimentación de aquellos que se encuentran en un nivel de comprensión similar.

La valoración se da en todas las etapas del ciclo y como profesores tenemos la responsabilidad de ir rotando para conocer y evaluar los obstáculos que se presenten en los diferentes momentos, o las nuevas indagaciones que van surgiendo. En los ejercicios en los que veíamos que las estudiantes mostraban mayor dificultad, se les planteaban diversas actividades y preguntas que les ayudaban a orientarse y a retomar cada paso utilizando material concreto, si era necesario.

Durante el ciclo de indagación, varias estudiantes se preguntaron por qué al sumar no podían poner un número de dos dígitos en la misma casilla (de unidades o decenas); las estudiantes que ya tenían una comprensión clara del tema les explicaron la razón utilizando cubos y mostrando lo que representa cada paso del proceso.

Consideraciones finales

Pudimos notar que, al haber evidenciado todo el proceso, es más fácil para ellas resolver una suma con símbolos porque entienden qué significa cada paso y, al equivocarse, pueden volver sobre aquello que hicieron y recordarlo al verlo real. "Desde la perspectiva constructivista, el conocimiento es una actividad adaptiva. Esto es, que se debería pensar en el conocimiento como un compendio de conceptos y acciones que podrían ser exitosas, dependiendo de la meta que se tenga planteada" (von Glasersfeld, 1995, p.4).

Durante el proceso, las docentes somos mediadoras. Es importante escuchar, interpretar lo que el estudiante piensa y dice, y tratar de construir un modelo sobre las estructuras conceptuales del estudiante. El profesor debe guiar a las estudiantes a reconstruir sus propias explicaciones basándose en experiencias concretas.

REFERENCIAS

Bybee et al (2006), *The BSCS 5E Instructional Model: Origins and effectiveness [en línea] disponible en:* https://bscs.org/sites/default/files/_legacy/BSCS_5E_Instructional_Model-Full_Report.pdf [2018, 20 de marzo]

Glasersfeld E. von (1995) A constructivist approach to teaching. In: Steffe L. P. & Gale J. (eds.) Constructivism in education. Erlbaum, Hillsdale: 3 effectiveness [en línea] disponible en: http://www.vonglasersfeld.com [2018, 20 de marzo]

Herrera et al. (2017), Ciclo de indagación Gimnasio Los Portales.

Desde la exploración de los **sentidos** hac abstracto

María José **Barrios Cadena**
Adriana **Garrido Neira**

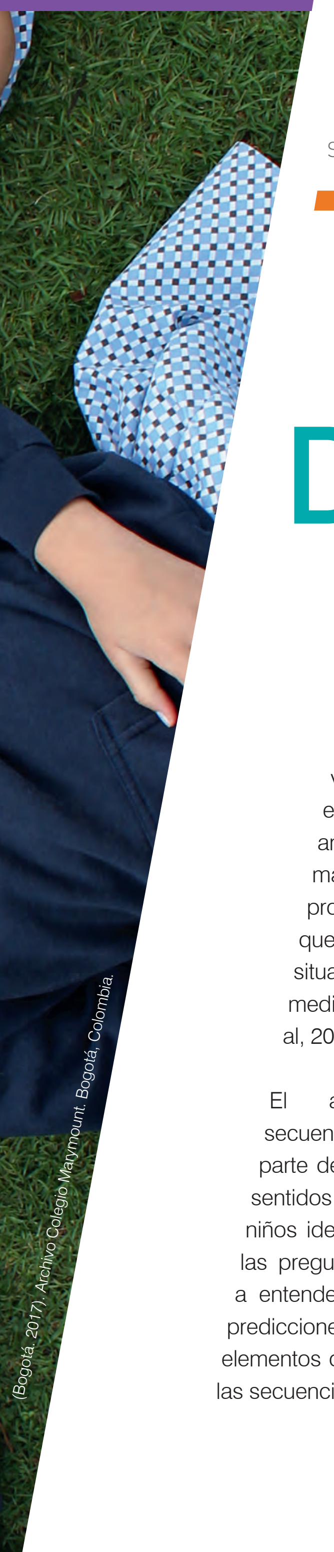
Profesoras del área de Matemáticas del Colegio Marymount.

ia lo

Este articulo aborda los problemas que tradicionalmente ocurren en la enseñanza de las secuencias, esto es, aprender desde la memoria y lo mecánico sin tener en cuenta los procesos cognitivos y etapas de desarrollo de los niños. Se pretende mostrar cómo a partir de los sentidos y la experiencia vivencial de los mismos, los estudiantes inician un recorrido concreto desde su cuerpo hasta lograr un aprendizaje abstracto de las secuencias.

El lector encontrará la descripción de los dos tipos de secuencias cíclicas e infinitas y la ruta de aprendizaje planteada para cada una de ellas, teniendo en cuenta las fases de aprendizaje corporal, concreto y abstracto, haciendo énfasis en la figura del profesor como facilitador de experiencias y preguntas que permiten a los niños avanzar en el aprendizaje.

Palabras clave
Secuencias, sentidos, Experiencias, Ruta de aprendizaje.



(Bogotá, 2017). Archivo Colegio Marymount. Bogotá, Colombia.

Dentro de la enseñanza de las secuencias se evidencia un problema al abordar el tema únicamente desde lo operativo: pedir a los estudiantes que completen las secuencias o que identifiquen el elemento diferente, sin tener en cuenta los procesos cognitivos de base, ni las fases por las que naturalmente deben pasar para alcanzar el concepto. Desde la propuesta de Carlos Diez, el método natural para el aprendizaje de las matemáticas toma como punto de partida el pensamiento variacional que "permite encontrar procedimientos para analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones problema de variación, es decir, que posibilita al niño identificar situaciones que cambian en el medio en el que vive". (Diez et al, 2012, p. 85)

El aprendizaje de las secuencias en edad preescolar parte de la estimulación de los sentidos a través de situaciones vivenciales que les permitan a los niños identificar la variación del mundo que los rodea; así mismo, las preguntas orientadoras ayudan al adulto a guiar al estudiante a entender los cambios del medio y de esta forma lograr hacer predicciones. De esta manera, los alumnos pueden predecir los elementos que faltan y así completar, organizar y descubrir errores en las secuencias.

"El aprendizaje de las secuencias en edad preescolar parte de la estimulación de los sentidos a través de situaciones vivenciales que les permitan a los niños identificar la variación del mundo que los rodea"

Para la enseñanza de las secuencias, se tienen en cuenta tres momentos importantes que son: el corporal, el concreto y el abstracto. El momento corporal consiste en trabajar los cinco sentidos al proporcionar experiencias como probar varios sabores, oler distintos aromas, escuchar diferentes sonidos, sentir diversas texturas, etc. Para esto, realizamos actividades que involucren su cuerpo para construir las secuencias. El momento concreto ocurre cuando los alumnos manipulan diferentes tipos de material como fichas, animales de plástico, figuras geométricas, etc. Y finalmente, el momento abstracto consiste en poder plasmar el concepto trabajado de manera experiencial en el papel.

Se trabajan dos tipos de secuencias: las cíclicas e infinitas. Las cíclicas son las primeras actividades de seriación a las que se enfrentan los niños y son el punto de partida para encontrar un patrón y predecir lo que va a pasar; estas series se repiten. Las secuencias infinitas son actividades que aumentan y disminuyen teniendo en cuenta variables de tamaño, forma, cantidad, grosor, etc.

Ruta de aprendizaje en la enseñanza de las secuencias

De acuerdo con Carlos Diez, para que los niños establezcan la noción de variación es importante que se propongan actividades en las cuales se desarrolle la siguiente ruta de aprendizaje.

Fase 1 Permitir la experimentación de variaciones con los cinco sentidos. Se deben realizar varias actividades con los sentidos que permitan reconocer la variación implícita en una secuencia. Esta fase ayuda a que los estudiantes aprendan que las cosas cambian y que estos cambios están asociados a situaciones que ocurrirán más adelante y, de esta manera, logran predecir.

Fase 2 A partir de la experimentación, hacer que los estudiantes reconozcan elementos fuera de lugar. Aquí, los estudiantes aprenden a reconocer los elementos que no hacen parte de una secuencia.

Fase 3 Hacer que los estudiantes organicen los elementos que están fuera de lugar. Una vez reconocen el elemento fuera de lugar, son capaces de organizar una secuencia de acuerdo con un patrón nuevo.

Fase 4 Hacer que los estudiantes creen secuencias con diferentes criterios como: Forma y color, tamaño y cantidad, etc.

En el colegio Marymount, seguimos las siguientes rutas de aprendizaje para interiorizar el concepto de secuencias cíclicas e infinitas.

Secuencias cíclicas

Momento corporal:

1. Determinar el elemento diferente en una secuencia sensorial (movimiento con el cuerpo).

Momento concreto:

2. Organizar una secuencia a partir de un patrón dado.
3. Completar la secuencia con un elemento que pertenece.
4. Realizar secuencias teniendo en cuenta diferentes criterios cualitativos y cuantitativos (forma, tamaño, color, cantidad, posición).
5. Organizar, completar y reordenar secuencias con dos o más elementos teniendo en cuenta diferentes criterios.
6. Construir secuencias con dos o más elementos a partir de un patrón o criterio dado.
7. Crear secuencias con dos o más criterios (forma y color; tamaño y cantidad).

Momento abstracto:

8. Hacer ejercicios sin apoyo concreto (ejercicios en hoja o tablero).

Secuencias infinitas

Momento corporal:

1. Organizar la secuencia sensorial aumentando y disminuyendo (movimiento, color, sabor, sonido, textura).
2. Descubrir el elemento que está mal ubicado en la secuencia y corregirlo.

Momento concreto:

3. Reordenar una secuencia dada según el criterio (regletas, fichas de construcción, tarjetas).

Momento abstracto:

4. Crear secuencias propias a partir del dibujo en hoja o tablero.

Aprendizajes

Estudiantes:

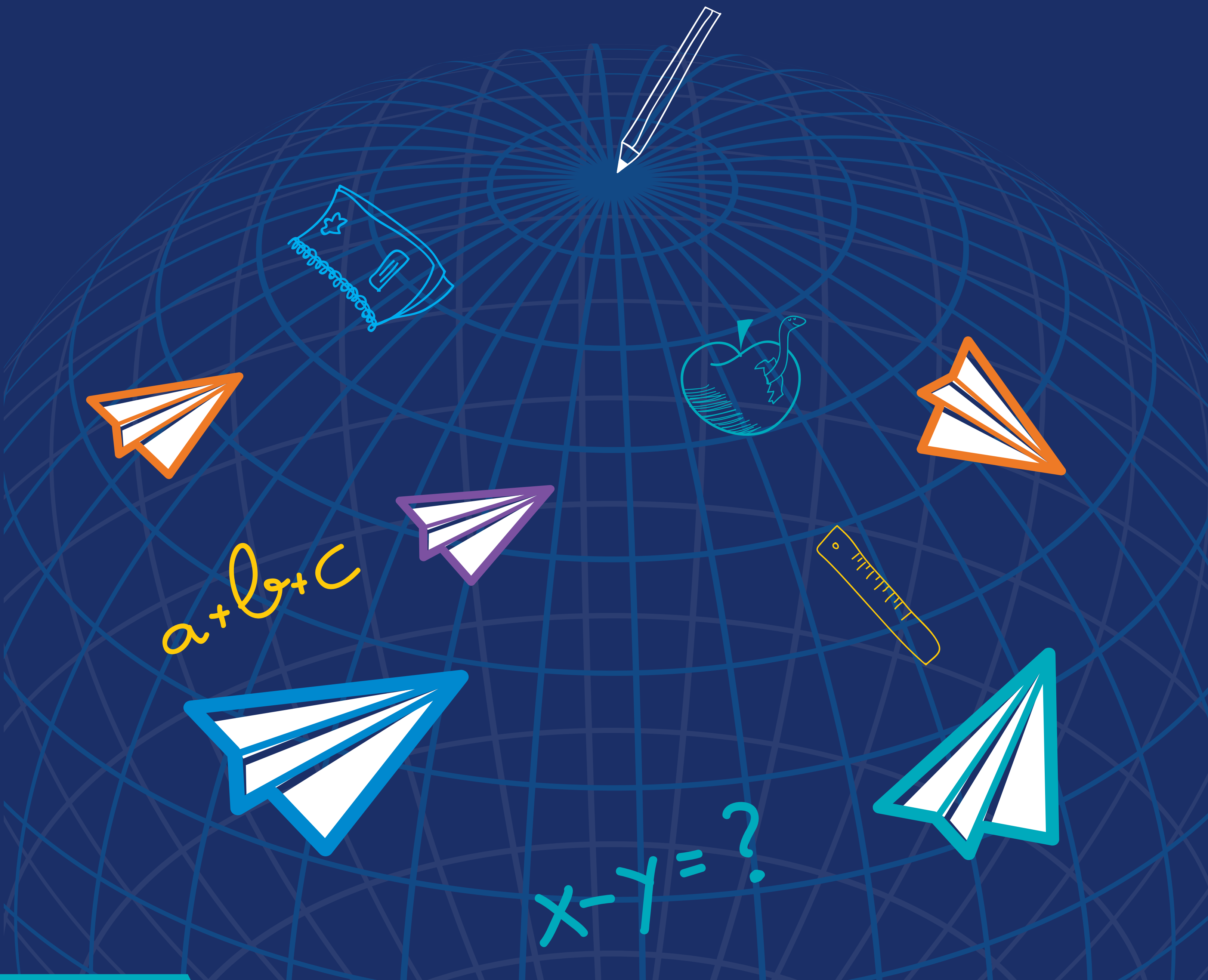
- Aprender desde lo concreto hacia lo abstracto favorece los procesos de deducción que son indispensables para cualquier aprendizaje.
- Desarrollo del pensamiento divergente (coordinación visual y motora).
- Los niños que desarrollan adecuadamente el pensamiento variacional pueden encontrar procedimientos para analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones problema de variación. Esto se desarrolla durante toda la escolaridad (por ejemplo, funciones).

Profesores:

- Creación de estrategias a partir del reconocimiento del proceso que recorre el estudiante.
- Aprender a hacer preguntas mediadoras que ayuden al estudiante a avanzar de lo concreto a lo abstracto.

BIBLIOGRAFÍA

Diez, C. et al. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático en la primera infancia*. Bogotá: Fundación para el Desarrollo Educativo y Pedagógico EDP.



70 YEARS MARYMOUNT
1948 - 2018

Gimnasio de Los Cerros

Colegio Los Nogales

Gimnasio Los Portales

www.marymountbogota.edu.co

Colegio Marymount

Marymount en sus manos

Colegio Marymount

Colegio Marymount